



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Ильин И. С., Тучин А.Г.

Квазипериодические орбиты
в окрестности точки
либрации L_1 системы
Солнце-Земля

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Ильин И. С., Тучин А.Г. Квазипериодические орбиты в окрестности точки либрации L_1 системы Солнце-Земля // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 6. 28 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-6>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша
Российской академии наук

И.С. Ильин, А.Г. Тучин

**Квазипериодические орбиты
в окрестности точки либрации L_1
системы Солнце-Земля**

Москва — 2016

И.С. Ильин, А.Г. Тучин

Квазипериодические орбиты в окрестности точки либрации L_1 системы Солнце-Земля

В работе рассмотрена методика баллистического проектирования квазипериодических орбит в окрестности точки либрации L_1 системы Солнце-Земля, а также построение одноимпульсных траекторий перелёта на данные орбиты с низкой околоземной орбиты. Данный метод позволяет формировать в окрестности либрационной точки квазипериодические орбиты заданной геометрии, требующие минимальных энергетических затрат на коррекции поддержания орбиты. Построение траекторий было выполнено в рамках используемой в Баллистическом центре ИПМ численно-эфемеридной модели Солнечной системы. Описанная методика была использована для построения рабочих орбит космических аппаратов «Спектр-РГ» и «Миллиметрон» в окрестности либрационной точки L_2 системы Солнце-Земля.

Ключевые слова: квазипериодические орбиты, коллинеарные точки либрации, точка L_1 .

I.S. Ilin, A.G. Tuchin

Quasiperiodic orbits near Sun-Earth L_1 libration point

This work covers quasiperiodic orbits' ballistic design for the the Sun-Earth system L_1 libration point and one-impulse transfer trajectories construction issues. The method described provides quasiperiodic orbits with prescribed geometry around Sun-Earth L_1 point with low-cost stationkeeping strategy. The problem is considered in the full ephemeris model of Solar system developed at the Ballistic center of Keldysh Institute. The methods described have been successfully used for construction of the nominal orbits for the "Spectr-RG" and "Millimetron" missions presupposing deployment of space telescopes in the vicinity of the Sun-Earth L_2 point.

Key words: quasiperiodic orbits, collinear libration points, L_1 point.

Введение

В работе рассмотрен вопрос построения квазипериодических орбит различных типов в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 системы Солнце-Земля. Актуальность данного исследования обусловлена планами Федерального космического агентства по развертыванию системы предупреждения астероидной опасности, предполагающей размещение внеатмосферных телескопов для детектирования околоземных космических объектов и прогнозирования их опасных сближений с Землёй. Один из проектов, реализующих данную концепцию, – Система обнаружения дневных астероидов (СОДА) – предполагает размещение внеатмосферного телескопа с солнечной стороны на удалении порядка 1-2 млн. км от Земли. Использование квазипериодической орбиты в окрестности либрационной точки L_1 системы Солнце-Земля для размещения космического телескопа позволяет сохранять постоянную пространственную конфигурацию объектов Солнце – космический аппарат (КА) – Земля, обеспечивая постоянные условия для наблюдения околоземного пространства.

Данный препринт является продолжением цикла работ [1-8], исследующих ограниченные орбиты в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце-Земля. Рассмотрение квазипериодических орбит в окрестности точки L_1 системы Солнце-Земля начинается с обзора успешно реализованных миссий. Второй и третий разделы посвящены рассмотрению коллинеарных точек либрации и квазипериодических орбит в их окрестности в рамках ограниченной круговой задачи трёх тел. Четвёртый раздел препринта рассматривает основные принципы методики формирования начального приближения для траектории перелёта на квазипериодические орбиты в окрестности точки L_1 в рамках ограниченной круговой задачи трёх тел, подробно описанной в работах [1,3]. Пятый раздел содержит описание методики расчёта коррекций поддержания квазипериодических орбит в рамках численно-эфемеридной модели Солнечной системы, а также результаты расчётов – квазипериодические траектории.

1. Обзор миссий к либрационной точке L_1 системы Солнце-Земля

Первая работа, рассматривающая использование орбит в окрестности коллинеарных точек либрации для размещения исследовательских КА, принадлежит Роберту Фаркуа [9]. В тезисах своей диссертации он изложил инженерную методику, позволяющую удерживать КА на квазипериодической орбите в окрестности коллинеарных либрационных точек системы Земля-Луна с целью обеспечения связи с Землей. Этот проект не был реализован, однако предложенные методы описания динамики полёта в рамках ограниченной круговой задачи трёх тел были использованы при проектировании траектории КА “ISEE-3”, ставшей первой миссией, отправленной в окрестности точки либрации – в 1978 г. аппарат “ISEE-3” был выведен на траекторию перелёта к

точке L_1 системы Солнце-Земля. В работах Фаркуа в рамках ограниченной задачи трёх тел была показана роль точек либрации, позволивших в данной миссии получить достаточно сложную и эволюционирующую траекторию движения аппарата в системе Солнце-Земля-Луна с минимальными затратами топлива. Во многом благодаря этой пионерской миссии использование динамики коллинеарных точек либрации стало рассматриваться как реальная инженерная методика.

Аппарат для исследования комет и солнечного ветра “ISEE-3” был первым КА, выведенным на квази-гало-орбиту. Он вышел на траекторию прямого перелёта к точке L_1 системы Солнце-Земля, совершил несколько оборотов на квази-гало-орбите в её окрестности, затем был переведён в окрестность точки L_2 . После выполнения нескольких гравитационных маневров у Луны аппарат был направлен на сближение с кометой Якобини-Циннер. Гало-орбита в окрестности точки L_2 имела небольшой выход из плоскости эклиптики, составлявший 1.2 тыс. км. На рис. 1 [9] представлена траектория движения КА “ISEE-3” в течение 100 суток после запуска и отражены манёвры коррекции траектории перелёта. Суммарные затраты характеристической скорости на коррекции на перелёте составили 57 м/с.

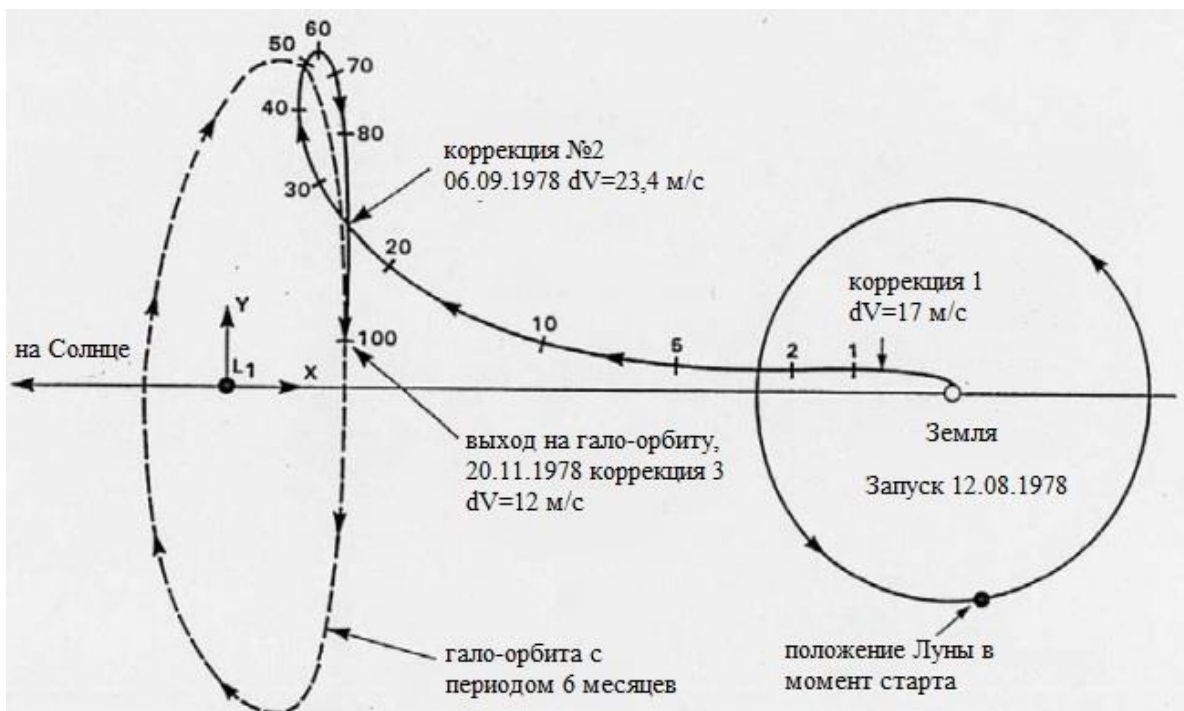


Рис. 1. Траектория перелёта космического аппарата “ISEE-3” на гало-орбиту в окрестности точки либрации L_1 системы Солнце-Земля

Следующая миссия, использовавшая квази-гало-орбиту в окрестности точки L_1 системы Солнце-Земля, – космическая обсерватория SOHO, совместный проект Европейского космического агентства (ЕКА) и Национального управления по воздухоплаванию и исследованию космического пространства

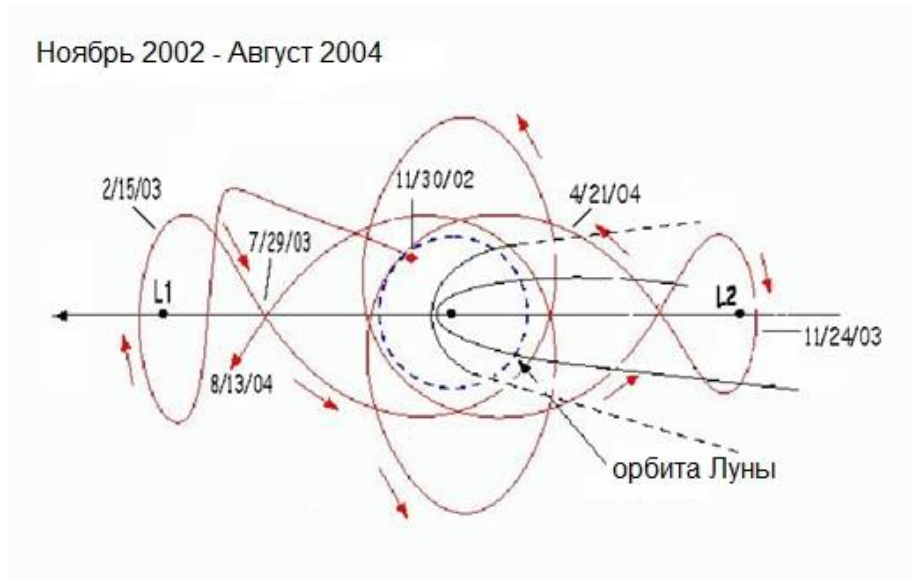


Рис. 3. Траектория движения КА “WIND” с 11.2002 по 08.2004

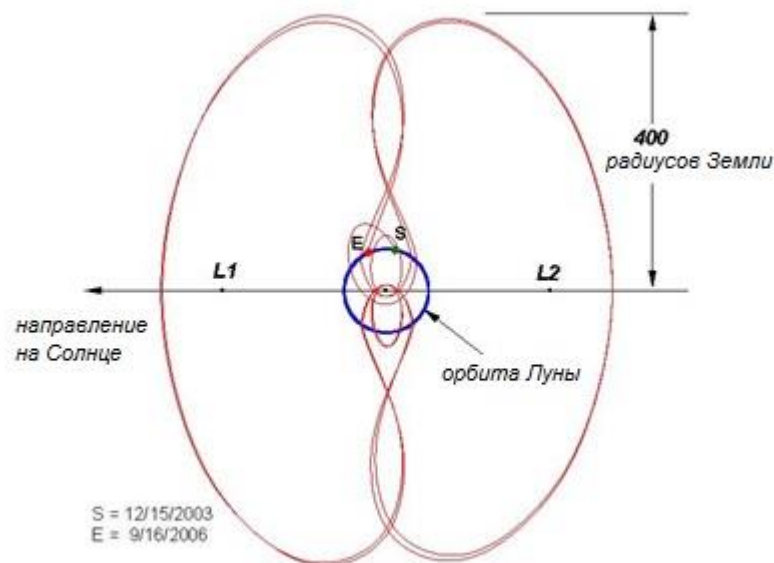


Рис. 4. Траектория движения КА “WIND” с 15.12.2003 по 16.09.2006

Первым аппаратом, выведенным на квазипериодическую орбиту Лиссажу, стал КА НАСА “ACE”, запущенный к точке либрации L_1 системы Солнце-Земля в 1997 г. Выведение на орбиту и её поддержание потребовали коррекций, коррекции удержания необходимо было производить с периодичностью 8 недель, коррекции, изменяющие геометрию орбиты для поддержания угла КА-Солнце-Земля, – раз в 3-6 месяцев. Период орбиты составил 178 суток, аппарат

функционирует по настоящее время. Орбита КА “ACE” представлена на рис. 5 [URL: http://www.srl.caltech.edu/ACE/ASC/DATA/browse-html/gse_color.html].

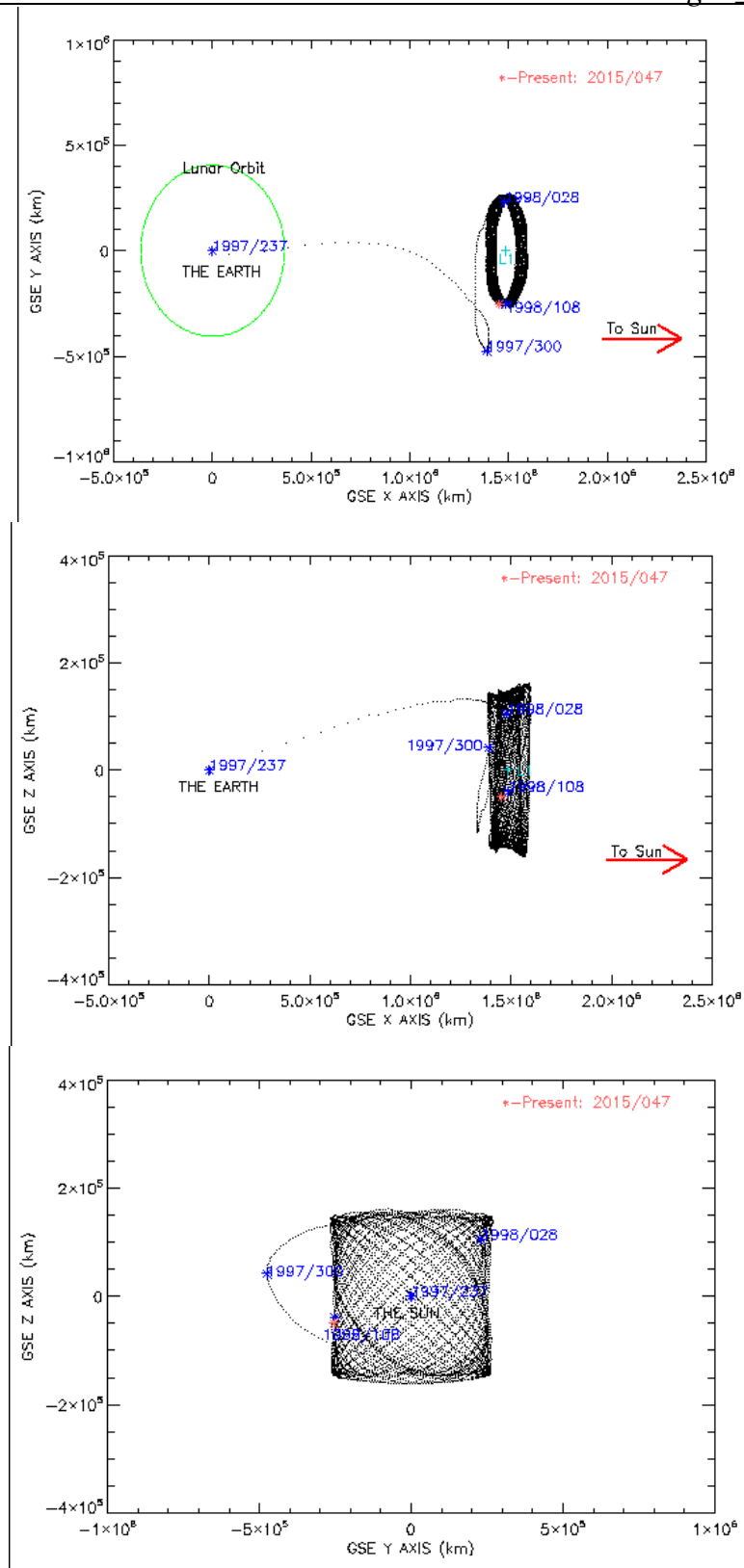


Рис. 5. Траектория движения КА “ACE”, проекция квазипериодической орбиты на плоскости XY, XZ, YZ вращающейся СК

В 2001 г. к точке L_1 системы Солнце-Земля был запущен КА “Genesis”, также использовавший орбиту Лиссажу. Перелёт в окрестность точки либрации был осуществлён по одноимпульсной схеме, однако при переходе на целевую квазипериодическую орбиту потребовалось выполнение небольшого манёвра. Периодичность выполнения манёвров поддержания орбиты КА в окрестности точки либрации также составила около 90 суток. При проектировании траектории для этой миссии впервые была применена теория динамических систем. Траектория КА “Genesis” приведена на рис. 6. [URL: <http://genesismission.jpl.nasa.gov/gm2/mission/halo.htm>]

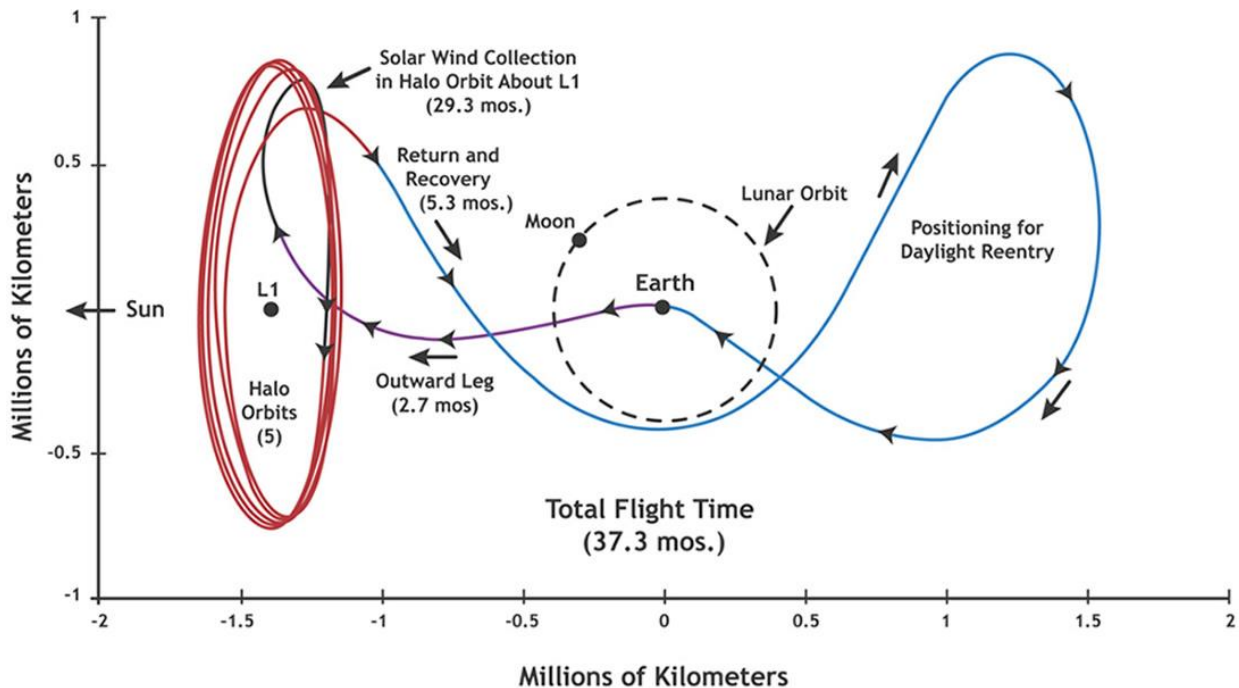


Рис. 6. Траектория КА “Genesis”

11 февраля 2015 г. на траекторию перелёта к точке L_1 системы Солнце-Земля был выведен КА НАСА “Dscovr”, имеющий на борту научную аппаратуру для исследований солнечной активности, в частности, мониторинга солнечного ветра, а также два прибора для исследования земной атмосферы. В июне 2015 г. аппарат вышел на квазипериодическую орбиту Лиссажу малой амплитуды в окрестности точки L_1 . Для выведения КА на траекторию перелёта к точке либрации была использована новая ракета-носитель “Falcon 9”, разработанная корпорацией SpaceX.

Удобство использования квазипериодических орбит для размещения на них космических телескопов и других аппаратов для астрофизических исследований обусловлено следующим фактором: эти орбиты сохраняют свою пространственную ориентацию относительно Солнца и Земли. Исследуемые в данной работе квазипериодические орбиты располагаются в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 , удалённой от Земли на расстояние порядка

1.5 млн. км. В этом случае пространственная конфигурация орбиты позволяет сохранять ориентацию размещённого на аппарате телескопа в направлении Земли и избегать его засветки Солнцем при условии поддержания постоянной ориентации аппарата. В то же время, вращаясь вместе с Землей вокруг Солнца, аппарат за год совершает оборот на 360° , что позволяет наблюдать всю небесную сферу.

Размещение КА на квазипериодической орбите в окрестности либрационной точки L_1 системы Солнце-Земля является энергетически выгодным: возможен безымпulsive переход на подобную орбиту с геоцентрической отлётной траектории, суммарные затраты характеристической скорости на коррекции поддержания орбиты также невелики.

2. Коллинеарная точка либрации L_1 как частное решение ограниченной круговой задачи трёх тел

Рассмотрим движение трёх материальных точек с массами m_1 , m_2 и m , притягивающихся по закону Ньютона. Сами точки также будем обозначать буквами m_1 , m_2 и m . Полагаем, что $m_1 > m_2 \gg m$. Движение точек m_1 и m_2 считаем круговым. Радиусы-векторы точек m_1 , m_2 и m в некоторой инерциальной системе отсчета обозначим \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 и \mathbf{r} . Уравнения движения точек имеют вид

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{\gamma m_2 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{\gamma m_1 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\gamma m_1 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} - \frac{\gamma m_2 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3}. \quad (1)$$

Здесь точка над символом означает дифференцирование по времени t , γ – постоянная тяготения. Положим $\mathbf{R} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_2$. Вычитая первое уравнение системы (1) из её второго уравнения, получим уравнение относительно \mathbf{R} :

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{\gamma (m_1 + m_2) \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3}, \quad (2)$$

Вычтем второе уравнение (1) из последнего уравнения этой системы. Будем иметь

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{\gamma m_2 \boldsymbol{\rho}}{|\boldsymbol{\rho}|^3} + \gamma m_1 \left(\frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} - \frac{\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}}{|\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}|^3} \right), \quad (3)$$

Возьмём произвольное решение $\mathbf{R}(t)$ уравнения (2), необязательно описывающее круговые орбиты точек m_1 и m_2 . Будем искать частное решение уравнения (3) в виде $\boldsymbol{\rho} = x\mathbf{R}(t)$, где $x = \text{const}$. Подставим выписанное выражение

для \mathbf{p} в уравнение (3) и учтём, что $\ddot{\mathbf{p}} = x\ddot{\mathbf{R}}(t) = -\gamma(m_1 + m_2)\mathbf{R}(t)|\mathbf{R}(t)|^{-3}$. После несложных преобразований получим уравнение, определяющее значения x :

$$-(m_1 + m_2)x = -\frac{m_2}{x^2} + \frac{m_1x(2+x)}{(1+x)^2}. \quad (4)$$

Введём параметр $\mu = m_2(m_1 + m_2)^{-1}$, тогда уравнение (4) примет следующий вид:

$$x - \frac{\mu}{x^2} - \frac{x(x+2)(\mu-1)}{(1+x)^2} = 0. \quad (5)$$

Выписанное уравнение приводится к алгебраическому уравнению пятой степени, которое всегда имеет три действительных корня [10]. Частные решения уравнения (3), отвечающие этим корням, называются коллинеарными точками либрации. Ниже рассматривается корень из интервала $(-1, 0)$, задающий точку либрации, традиционно обозначаемую L_1 . Они лежат в интервалах $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ и $(0, +\infty)$. Точке либрации L_1 отвечает корень уравнения

$$x^5 - (3 - \mu)x^4 + (3 - 2\mu)x^3 - \mu x^2 + 2\mu x - \mu = 0. \quad (6)$$

Исследование проводится для точек m_1 и m_2 , служащих моделью системы Солнце – Земля. При этом под m_2 и \mathbf{r}_2 понимаются масса и радиус-вектор барицентра системы Земля – Луна, решение уравнения (2) – круговая орбита, $R = |\mathbf{R}| = \text{const}$, $R \approx 1.496 \cdot 10^{11}$ м,

$$n_0 = \sqrt{\frac{\gamma(m_1 + m_2)}{R^3}} \approx 1.991 \cdot 10^{-7}, \text{ с.}$$

Система Солнце – Земля характеризуется значением $\mu = 3.040424 \cdot 10^{-6}$. Корень уравнения (6), отвечающий точке либрации L_1 , обозначим x_0 , $x_0 = -0.01001097789$ для рассматриваемой системы.

3. Квазипериодические орбиты в окрестности точки L_1 в рамках ограниченной круговой задачи трёх тел

Для исследования движения точки m в окрестности точки либрации L_1 уравнение (3) запишем в скалярной форме в декартовой системе координат,

которую обозначим m_2xyz . Начало этой системы находится в точке m_2 , орты ее базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ определены соотношениями

$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad \mathbf{k} = \frac{\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}}{|\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}|}, \quad \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}. \quad (7)$$

Как нетрудно видеть,

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = n_0 \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = -n_0 \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} = \text{const}, \quad (8)$$

где n_0 – среднее движение.

Ниже в данном пункте компоненты векторов и координаты точек указываются в системе m_2xyz . В частности, $L_1 = (x_0 R, 0, 0)$.

Положим $\boldsymbol{\rho} / R = (x, y, z)$ и введём безразмерное время $\tau = n_0 t$, дифференцирование по которому будем обозначать штрихом. Тогда уравнения (3) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} x'' - 2y' + \left(\frac{\mu}{r^3} + \frac{1-\mu}{r_1^3} - 1 \right) x &= (1-\mu) \left(1 - \frac{1}{r_1^3} \right), \\ y'' + 2x' + \left(\frac{\mu}{r^3} + \frac{1-\mu}{r_1^3} - 1 \right) y &= 0, \\ z'' + \left(\frac{\mu}{r^3} + \frac{1-\mu}{r_1^3} \right) z &= 0, \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r_1 &= \sqrt{(1+x)^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Точке либрации L_1 отвечает положение равновесия (стационарное решение) системы (9) $x = x_0, y = z = 0$. Малые колебания точки m в окрестности точки L_1 описываются линеаризованными уравнениями

$$\begin{aligned}
\Delta x'' - 2y' - (2a+1)\Delta x &= 0 \\
y'' + 2\Delta x' + (a-1)y &= 0 \\
z'' + az &= 0
\end{aligned}
\tag{10}$$

где $\Delta x = x - x_0$,

$$a = \frac{\mu}{x_0^3} + \frac{1-\mu}{(1+x_0)^3}.$$

Общее решение линеаризованных уравнений имеет вид (см. [10])

$$\begin{aligned}
\Delta x &= c_1 e^{\lambda\tau} + c_2 e^{-\lambda\tau} + c_3 \cos \omega\tau + c_4 \sin \omega\tau \\
y &= k_1 (c_1 e^{\lambda\tau} - c_2 e^{-\lambda\tau}) + k_2 (c_3 \sin \omega\tau - c_4 \cos \omega\tau) \\
z &= c_5 \cos \sqrt{a}\tau + c_6 \sin \sqrt{a}\tau
\end{aligned}
\tag{11}$$

Здесь c_1, \dots, c_6 – произвольные постоянные интегрирования,

$$\begin{aligned}
\lambda &= \sqrt{\frac{\sqrt{9a^2 - 8a} + a - 2}{2}}, \\
\omega &= \sqrt{\frac{\sqrt{9a^2 - 8a} - a + 2}{2}}, \\
k_1 &= \frac{\lambda^2 - 2a - 1}{2\lambda} = -\frac{2\lambda}{\lambda^2 + a - 1}, \\
k_2 &= -\frac{2\omega}{\omega^2 - a + 1} = -\frac{\omega^2 + 2a + 1}{2\omega}.
\end{aligned}$$

Для упрощения дальнейшего изложения выполним переход к более удобным переменным интегрирования, воспользовавшись следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{c_3^2 + c_4^2}, \quad B = \sqrt{c_5^2 + c_6^2}, \quad C = c_1, \quad D = c_2, \\
\cos(\varphi_1) &= \frac{c_3}{\sqrt{c_3^2 + c_4^2}}, \quad \sin(\varphi_1) = -\frac{c_4}{\sqrt{c_3^2 + c_4^2}}, \\
\cos(\varphi_2) &= \frac{c_5}{\sqrt{c_5^2 + c_6^2}}, \quad \sin(\varphi_2) = -\frac{c_6}{\sqrt{c_5^2 + c_6^2}}.
\end{aligned}$$

Тогда решение системы линеаризованных дифференциальных уравнений, описывающих движение в малой окрестности точки L_1 во вращающейся системе координат с осью X , направленной на Солнце, записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= -A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C e^{\lambda t} + D e^{-\lambda t} \\
\xi_2 &= k_2 A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + k_1 (C e^{\lambda t} - D e^{-\lambda t}) \\
\xi_3 &= B \cos(\omega_2 t + \varphi_2)
\end{aligned} \tag{12}$$

Такая запись позволяет выделить в явном виде периодические колебания в плоскости XY – амплитуда задаётся коэффициентом A , частота – ω_1 , фаза – φ_1 , и колебания в ортогональной плоскости с частотой ω_2 , фазой φ_2 и коэффициентом B , определяющим амплитуду. Коэффициенты C и D соответствуют экспоненциальному уходу от периодического решения в положительном и отрицательном времени.

Поскольку собственные значения матрицы системы линеаризованных уравнений движения ограниченной круговой задачи трёх тел в трёх коллинеарных точках либрации принимают значения $\{\pm i\omega_1, \pm i\omega_2, \pm \lambda\}$, $\omega_1, \omega_2, \lambda > 0$, $i = \sqrt{-1}$, согласно теории устойчивости Ляпунова в линейном приближении это особые точки типа центр \times центр \times седло. Так как система дифференциальных уравнений движения автономна, обладает первым интегралом и стационарным решением, к ней можно применить теорему Ляпунова о существовании периодических решений, называемых обычно его именем [11]. Согласно теореме Ляпунова, благодаря наличию части центр \times центр, в случае выполнения условия $\frac{\omega_2}{\omega_1} \neq k$, где k – целое число, каждая

коллинеарная равновесная точка производит два однопараметрических семейства периодических орбит, известных как семейства плоских или вертикальных периодических орбит Ляпунова. Семейство плоских орбит имеет период $T \approx 2\pi / \omega_1$ и близко решениям линеаризованных уравнений движения при $B = C = D = 0$. В решениях этого семейства $z \equiv 0$ – материальная точка не

покидает плоскости XU . Семейство вертикальных орбит имеет период $T \approx 2\pi / \omega_2$ и близко к решениям системы (3) при $A=C=D=0$.

При возрастании энергии (амплитуд колебаний) линейная устойчивость орбит меняется и, наряду с семействами периодических орбит Ляпунова, возникают бифуркационные орбиты, среди которых появляются другие семейства периодических орбит. Первое семейство, отделяющееся от семейства плоских орбит Ляпунова, относится к трёхмерным периодическим орбитам, симметричным относительно плоскости $y=0$ – это так называемые гало-орбиты. Периодичность гало-орбит обусловлена совпадением частот колебаний в плоскости XU и по оси OZ – $\omega_1 = \omega_2$. Порождаются два семейства гало-орбит: северное и южное.

Если отношение частот колебаний в различных плоскостях является иррациональным числом, движение принимает квазипериодический характер – период замыкания траектории стремится к бесконечности. В случае близости частот и амплитуд колебаний пространственному периодическому решению – гало-орбите – квазипериодическая траектория лежит в окрестности периодической гало-орбиты на поверхности двумерного тора. Такие траектории будем называть квази-гало-орбитами, проектирование именно этого класса орбит рассматривается в работе. Если же частоты различаются существенным образом, траектория движения называется орбитой Лиссажу.

4. Формирование начального приближения для траектории перелёта на квазипериодические орбиты в окрестности точки L_1 в рамках ограниченной круговой задачи трёх тел

Поиск одноимпульсных траекторий перелёта с низкой околоземной орбиты выведения на квазипериодическую орбиту в окрестности точки либрации L_1 системы Солнце-Земля выполняется на инвариантных многообразиях коллинеарной точки либрации с помощью варианта метода продолжения по параметру, предложенного М.Л. Лидовым [12] и развитого в работах [1,3] применительно к либрационной точке L_2 . Основная идея метода заключается в продолжении траектории из некоторой точки квазипериодической орбиты в обратном направлении по времени до момента пересечения с орбитой выведения. Заданная таким образом траектория принадлежит инвариантному многообразию, связывающему элементы центрального многообразия (периодические и квазипериодические орбиты в окрестности коллинеарной точки либрации) с областью околоземного пространства [13]. Вариацией точки старта с квазипериодической орбиты можно добиться пересечения траекторией орбиты выведения заданного радиуса. Таким образом, метод изолиний позволяет установить функциональную связь между параметрами квазипериодической орбиты и параметрами отлётной от Земли траектории.

Остановимся на некоторых отличиях выражений для формирования орбиты в окрестности точки L_1 .

Движение КА рассматривается во вращающихся системах координат (СК): в системе $Ox_1x_2x_3$ с началом в центре Земли O и в системе $O'\xi_1\xi_2\xi_3$ с началом O' в точке либрации L_1 (рис. 2). При этом: $x_1 = \xi_1 + |OO'|$, $x_2 = \xi_2$, $x_3 = \xi_3$. Зависимость координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 от времени определяется решением линеаризованной в окрестности точки L_1 системы уравнений движения (12).

Рассмотрим переход между системами координат $O'\xi_1\xi_2\xi_3$ и $Ox_1x_2x_3$. Если траектория начинается в окрестности Земли и является асимптотической к условно-периодической орбите, расположенной в достаточно малой окрестности L_1 , то такая траектория обязательно пересечёт плоскость $x_1 = x_1^*$, где $x_1^* = r_L \cdot \theta$, $\theta \in \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right]$ r_L – расстояние до точки либрации L_1 , $r_L = |xO \cdot \mathbf{R}|$. При этом в главном приближении характеристики траектории для $|x_1| < |x_1^*|$ в СК $Ox_1x_2x_3$ должны удовлетворительно описываться решениями задачи двух тел, а при $|x_1| > |x_1^*|$ – линейным приближением (12).

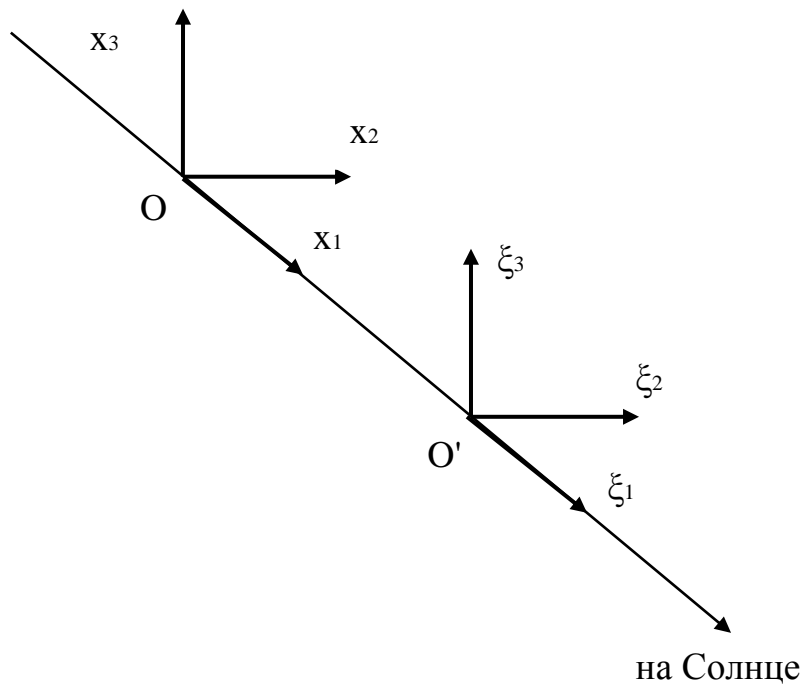


Рис. 7. Системы координат $Ox_1x_2x_3$ и $O'\xi_1\xi_2\xi_3$

Асимптотичность траектории (асимптотическое приближение к условно-периодической орбите) в рамках такого приближения определяется условием $C=0$.

Рассмотрим алгоритм вычисления r_π по заданным фазам φ_1 и φ_2 . Для этого будем рассматривать его как функцию параметров квазипериодической орбиты, т.е. $r_\pi = f(\varphi_1, \varphi_2, \theta_A, \theta_B)$ ($\theta_A = \frac{A}{r_L}$, $\theta_B = \frac{B}{r_L}$, $\theta_C = \frac{C}{r_L}$). Сначала вычисляются значения параметров системы Солнце-Земля и констант $\mu', n_1, r_L, r_L, \omega_1, \omega_2, \lambda, k_1, k_2, a$. Затем вычисляется вектор состояния КА в инерциальной СК, полученной фиксацией осей вращающейся СК на фиксированный момент времени t в зависимости от параметров: A, B, φ_1 и φ_2 .

Пусть

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3$$

$$x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$$

– вектор состояния КА в момент времени $t=0$ во вращающейся СК с центром в L_1 ,

– компоненты векторов положения и скорости КА в момент времени $t=0$ в невращающейся геоцентрической эклиптической СК $Ox_1x_2x_3$, ось Ox_1 которой направлена на Солнце в момент времени t_0 ,

$$x_1^* = \theta \cdot r_L$$

– параметр перехода из сферы действия Земли в окрестность L_1 , $\theta \in \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right]$.

Пусть начало отсчета выбрано так, что при $t=t_0$ выполняется равенство: $x_1 = x_1^*$. Седловая компонента линейного приближения обеспечивает возможность перехода с орбиты искусственного спутника Земли на квазипериодическую орбиту без импульса торможения. Значение параметра D выбирается таким образом, что при $t=t_0$ траектория движения аппарата пересекает границу сферы действия Земли:

$$D = A \cos \varphi_1 - r_L (1 - \theta).$$

Следует отметить, что в выбранной системе координат $D < 0$, т.к. определяет уход по направлению от Солнца, коэффициент $C > 0$, т.к. отвечает движению к Солнцу, а коэффициенты A и B имеют положительные значения.

Компоненты векторов положения и скорости КА вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= r_L(1-\theta) & \dot{\xi}_1 &= \omega_1 A \sin \varphi_1 - \lambda D \\
\xi_2 &= k_2 A \sin \varphi_1 - k_1 D, & \dot{\xi}_2 &= k_2 \omega_1 A \cos \varphi_1 + k_1 \lambda D \\
\xi_3 &= B \cos \varphi_2 & \dot{\xi}_3 &= -\omega_2 B \sin \varphi_2
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= \xi_1 + r_L & \dot{x}_1 &= \dot{\xi}_1 - n_1 x_2 \\
x_2 &= \xi_2 & \dot{x}_2 &= \dot{\xi}_2 + n_1 x_1 \\
x_3 &= \xi_3 & \dot{x}_3 &= \dot{\xi}_3
\end{aligned} \tag{14}$$

Далее по вектору $(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ вычисляются параметры траектории перелёта с орбиты выведения на квазипериодическую орбиту как элементы геоцентрической высокоэллиптической орбиты КА, в том числе рассчитывается расстояние перицентра r_π .

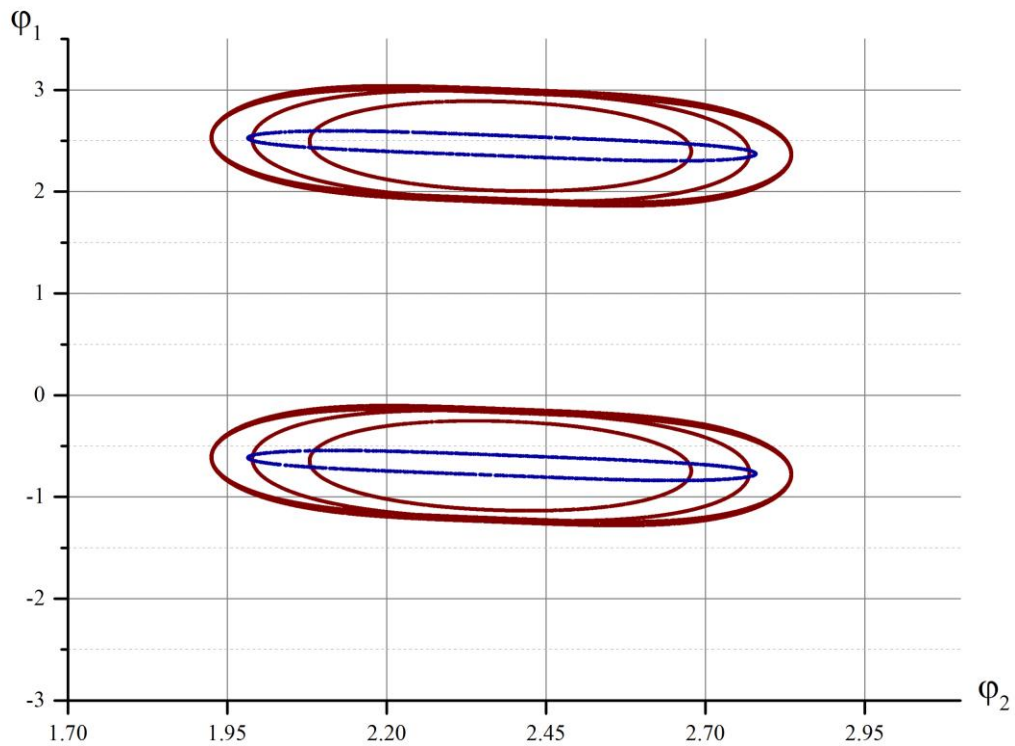


Рис. 8. Изолинии, рассчитанные для перелёта в окрестность точки L_1
 $\theta_A = 0.20, \theta_B = 0.1552; \theta_A = 0.20, \theta_B = 0.16; \theta_A = 0.20, \theta_B = 0.17;$
 $\theta_A = 0.18, \theta_B = 0.16; \theta_A = 0.19, \theta_B = 0.16; \theta_A = 0.20, \theta_B = 0.85.$

Таким образом, устанавливается связь между параметрами квазипериодической орбиты в окрестности точки либрации L_1 и параметрами

геоцентрической отлётной траектории, что составляет суть метода изолиний. Затем с помощью итерационной процедуры, использующей метод бисекции, коррекцией значения фаз φ_1, φ_2 значение r_π приводится к заданной высоте орбиты выведения.

На рис. 8 представлены изолинии, использованные для расчёта множеств квазипериодических орбит в окрестности точки L_1 . Соотношение амплитуд колебаний θ_A и θ_B для получения квази-гало-орбит было подобрано таким образом, чтобы сформировать два класса квазипериодических орбит – орбиты Лиссажу (красный цвет) и квази-гало-орбиты большой амплитуды (синий цвет) - $\theta_A = 0.20, \theta_B = 0.850$. Высота перицентра низкой околоземной орбиты принята равной 300 км, значения фаз φ_1, φ_2 на графике приведены в радианах.

5. Квазипериодические орбиты в окрестности точки L_1 системы Солнце-Земля, рассчитанные в рамках численно-эфемеридной модели Солнечной системы

Алгоритм баллистического проектирования траекторий перелёта на заданную квазипериодическую орбиту в рамках численно-эфемеридной модели Солнечной системы подробно рассмотрен в работах [1, 3]. Расчёт траекторий перелёта с низкой околокруговой орбиты на квазипериодические орбиты выполняется в рамках модели движения КА, учитывающей гравитационное воздействие Земли, Солнца, Луны и планет Солнечной системы, неравномерность вращения Земли, силы давления солнечной радиации, влияние атмосферы Земли. Для учёта нецентральности гравитационного поля Земли применяется модель гравитационного потенциала Земли ПЗ90-2 размерности 36x36. При расчёте перелётов с использованием гравитационных манёвров применяется модель гравитационного поля Луны JGL075D1 размерности 75x75. Учёт неравномерности вращения Земли обеспечивается моделью IAU2000A, рекомендованной Международным астрономическим союзом. На участке отлёта от Земли используется модель верхней атмосферы Земли ГОСТ Р 25645.166-2004.

Для определения положения Солнца и планет Солнечной системы используется астрономический ежегодник DE421, разработанный в JPL NASA. В качестве основной рабочей системы координат выбрана инерциальная геоцентрическая прямоугольная система координат (СК) J2000, также используются селенографическая прямоугольная вращающаяся СК и геоцентрическая прямоугольная гринвичская СК ПЗ90-2. Моделирование работы двигателей КА не производится, задача решается в импульсной постановке. Численное интегрирование уравнений движения КА для построения траектории выполняется методом Дормана-Принса. Наклонение орбиты выведения полагается равным 51.6° относительно плоскости Земного экватора (что соответствует широте космодрома Байконур).

Квазипериодические орбиты являются неустойчивыми, так как наследуют гиперболическую неустойчивость коллинеарной либрационной точки, их порождающей. Кроме того, рассмотрение движения КА в численно-эфемеридной модели приводит к необходимости парирования дополнительных возмущений, вызванных отличием ограниченной круговой задачи трёх тел, для которой построено квазипериодическое приближение, от современной численной модели Солнечной системы. Для поддержания квазипериодических орбит в окрестности коллинеарных точек либрации требуется периодическое проведение манёвров коррекций траектории КА. Задачу расчёта коррекций можно рассматривать как оптимизационную задачу с двумя оптимизируемыми параметрами, в качестве которых выступают отклонения траектории КА от номинальной орбиты и суммарные затраты характеристической скорости на поддержание орбиты (сумма импульсов коррекций), а ограничением выступает минимальный интервал между коррекциями, обусловленный необходимостью проведения траекторных измерений для определения орбиты КА. Могут быть введены и другие ограничения – например, ограничения на направления векторов импульсов коррекций, связанные с конструктивными особенностями аппарата. В данной работе подобные дополнительные ограничения не рассматривались.

Существует две основные стратегии поддержания квазипериодических орбит с помощью корректирующих манёвров. Первая – удержание траектории в некоторой окрестности номинального решения – данная стратегия была применена в ходе полёта КА “ISEE-3”. Вторая стратегия – удержание КА на центральном многообразии ограниченной круговой задачи трёх тел, содержащем периодические и квазипериодические орбиты, – впервые была применена в ходе полёта КА “SOHO”. Данная стратегия ставит своей главной целью минимизацию неустойчивой компоненты решения системы линеаризованных уравнений движения, приводящей к экспоненциальному уходу из окрестности точки либрации. Вторая стратегия позволяет обеспечить поддержание периодической или квазипериодической орбиты существенно меньшей суммой корректирующих импульсов. Все последующие миссии к коллинеарным точкам либрации использовали различные методики расчёта манёвров коррекций, реализующие варианты этой стратегии удержания КА на орбите в окрестности точки либрации.

Однако минимизация неустойчивой компоненты решения, полученного в рамках ограниченной задачи трёх тел, является необходимым, но не достаточным условием поддержания квазипериодической орбиты – необходимо также парировать возмущения, вызванные гравитационным воздействием планет Солнечной системы и избегать нежелательной долгосрочной эволюции орбиты.

Метод расчёта коррекций поддержания квазипериодической орбиты, использованный в данной работе, реализует стратегию удержания траектории КА на центральном многообразии динамической системы [1,13].

Коррекция рассчитывается с периодичностью 1 раз в 45 суток, расчёт траектории КА между манёврами коррекций поддержания квазипериодической орбиты выполняется численным интегрированием уравнений движения КА в эфемеридной модели Солнечной системы. Вектор импульса коррекции уточняется градиентным методом из условия максимизации времени пребывания КА в заданной окрестности точки либрации L_1 после выполнения коррекции траектории:

$$F_{\Delta r}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = -(t_{\text{out } L_1} - t_{\text{in } L_1}).$$

Минимум функционала ищется градиентным методом с регулируемым шагом. Поправки к вектору скорости вычисляются по формуле:

$$\begin{pmatrix} \Delta V_x^{(i)} \\ \Delta V_y^{(i)} \\ \Delta V_z^{(i)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\Delta V_{\max}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial V_x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial V_y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial V_z}\right)^2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial V_x} \\ \frac{\partial F}{\partial V_y} \\ \frac{\partial F}{\partial V_z} \end{pmatrix},$$

где ΔV_{\max} – максимально допустимое значение поправки, $F(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ – используемый функционал, k – номер шага цикла сокращения шага. На каждом шаге i итерационного процесса контролируется выполнение условия $(F)_i > (F)_{i+1}$. Если условие не выполняется, происходит переход к циклу сокращения поправок к вектору скорости до уровня, при котором выполняется условие: $(F)_i > (F)_{i+1}$. При достижении локального минимума выполняется переключение метода на покоординатный спуск. Итерационный процесс завершается при достижении локального максимума. На каждой итерации цикла расчёта поправки к вектору скорости происходит контроль её нормы: если $\|\Delta \vec{V}\| > \Delta V_{\max}$ и при этом $F > (F)_{\max}$, то происходит выход из цикла расчёта импульса коррекции.

Максимизация времени пребывания в окрестности точки L_1 позволила продолжить решение от найденного приближения для квазипериодической орбиты естественным образом – поддержание орбиты позволяет находиться в заданной окрестности точки либрации бесконечно долго – уход от квазипериодической траектории обусловлен только внешними возмущениями, учитываемыми численно-эфемеридной моделью. Минимальные корректирующие импульсы позволяют парировать внешние возмущения и поддерживать решение на выбранном семействе квазипериодических орбит с заданным уровнем энергии (амплитудами), контролируя время существования

решения в заданной окрестности точки либрации. Отсутствие в функционале каких-либо параметров линейного решения позволяет сохранить движение в окрестности квазипериодической орбиты, в случае если начальное приближение ей принадлежало. При использовании данного метода сумма импульсов, требуемых для поддержания выбранной квазипериодической орбиты в течение 7,5 лет, в среднем составляет от 5 до 25 м/с без учёта ошибок исполнения манёвров коррекций орбиты.

Результатом работы алгоритма расчёта импульсов коррекций является построение траектории движения КА по квазипериодической орбите в течение заданного временного интервала в рамках описанной численно-эфемеридной модели Солнечной системы. После завершения расчета траектории КА выполняется расчет справочной баллистической информации, актуальной при выборе рабочей орбиты КА из множества рассчитанных вариантов. В частности, рассчитываются зоны видимости КА с наземных станций слежения. Кроме того, производится оценка светотеневой обстановки на борту КА, и, при необходимости, выполняется точный расчёт, позволяющий вычислить время нахождения КА в тени Земли. В целом класс квази-гало-орбит удовлетворяет условию постоянной освещенности КА Солнцем.

Рассмотрим примеры построенных квазипериодических орбит в окрестности точки L_1 . Был выполнен расчёт 96 траекторий со значениями параметров θ_A и θ_B , характеризующими геометрию орбиты Лиссажу, для диапазона дат старта с 01.01.2018 по 31.12.2018; а также расчёт 65 траекторий со значениями параметров $\theta_A = 0.20$, $\theta_B = 0.85$, задающими геометрию квази-гало-орбиты для диапазона дат старта с 01.01.2020 по 31.12.2020. Расчёт был выполнен с некоторым шагом по датам старта в пределах указанных диапазонов для уменьшения общего числа рассчитываемых траекторий. Представленные на рис. 9-18 графики соответствуют траекториям, рассчитанным для дат старта 01.05.2018 ($\theta_A = 0.20$, $\theta_B = 0.1552$;) и 31.01.2020, ($\theta_A = 0.20$, $\theta_B = 0.85$), суммы импульсов коррекций поддержания траекторий за период 7,5 лет составляют 4.3 м/с и 22.2 м/с соответственно.

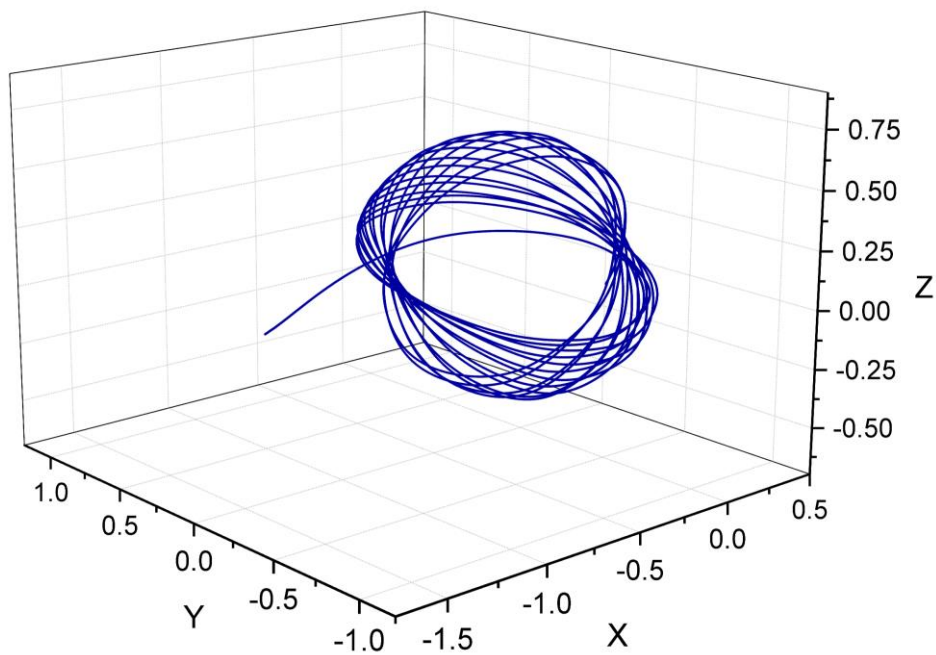


Рис. 9. Пространственная визуализация квазипериодической орбиты Лиссажу в СК с центром в точке L_1 , размерность – млн. км

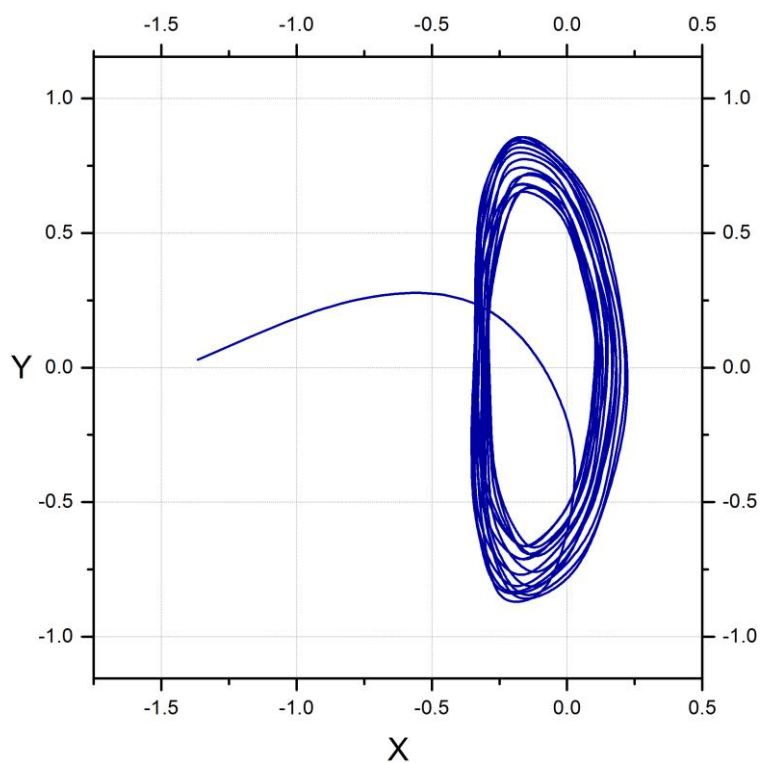


Рис. 10. Проекция квазипериодической орбиты Лиссажу на плоскость XY вращающейся СК с центром в точке L_1 , размерность – млн. км

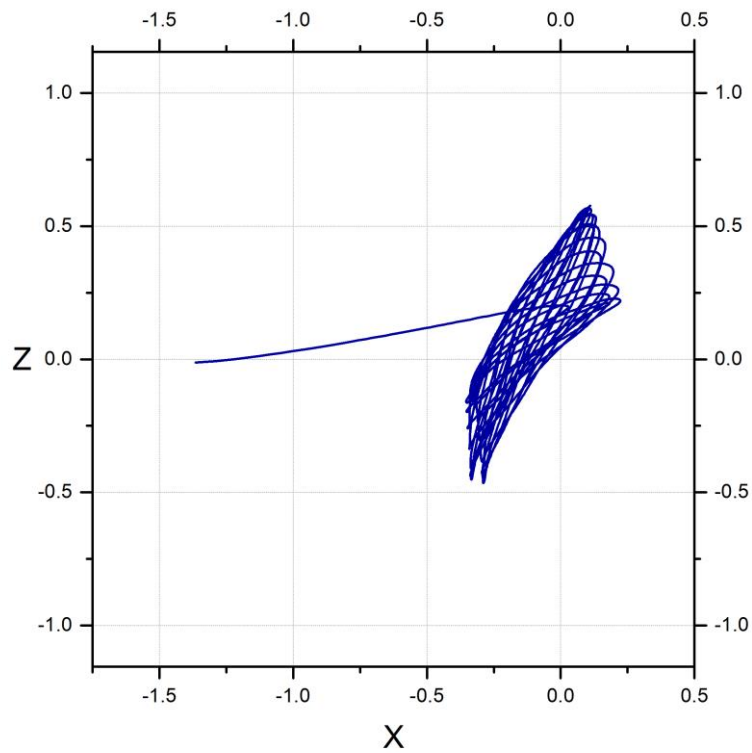


Рис. 11. Проекция квазипериодической орбиты Лиссажу на плоскость XZ вращающейся СК с центром в точке L_1 , размерность – млн. км

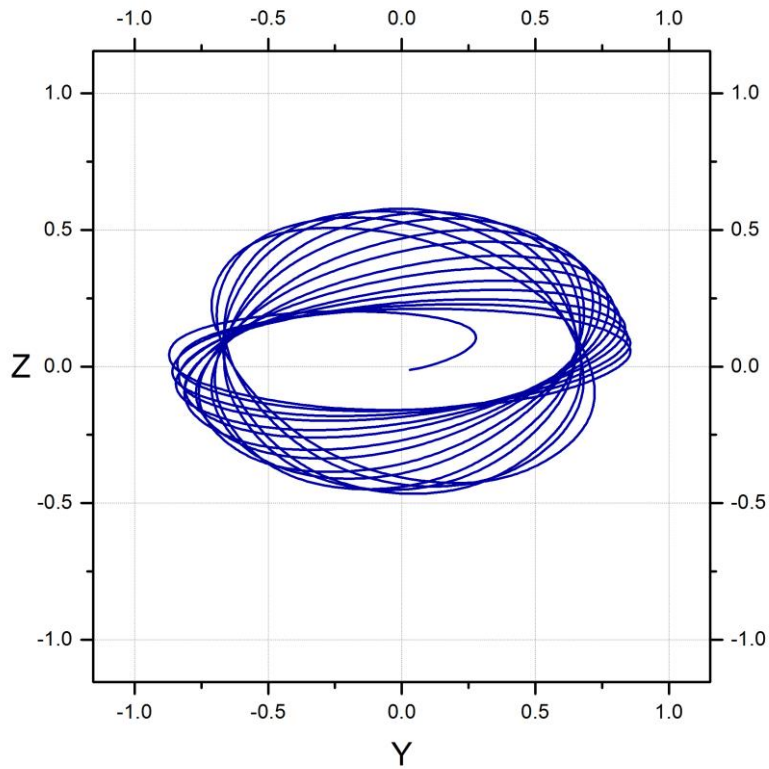


Рис. 12. Проекция квазипериодической орбиты Лиссажу на плоскость YZ вращающейся СК с центром в точке L_1 , размерность – млн. км

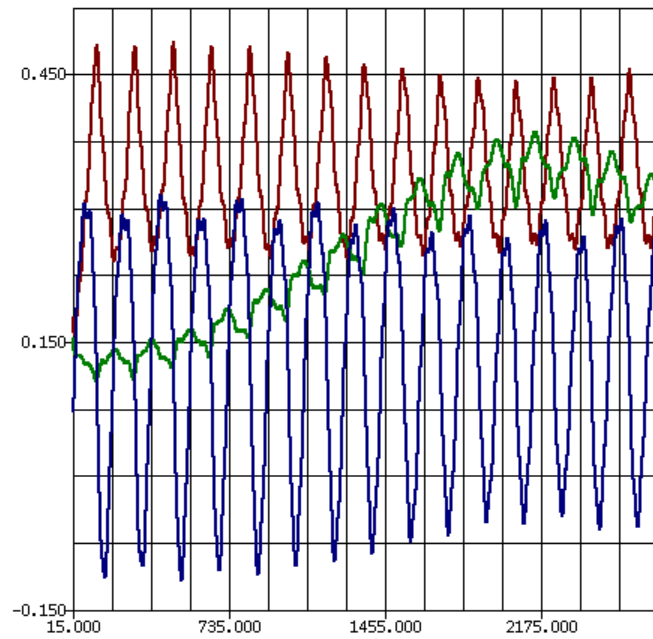


Рис. 13. График эволюции безразмерных параметров θ_A (красный), θ_B (зелёный) и θ_C (синий), характеризующих геометрию и устойчивость представленной орбиты Лиссажу

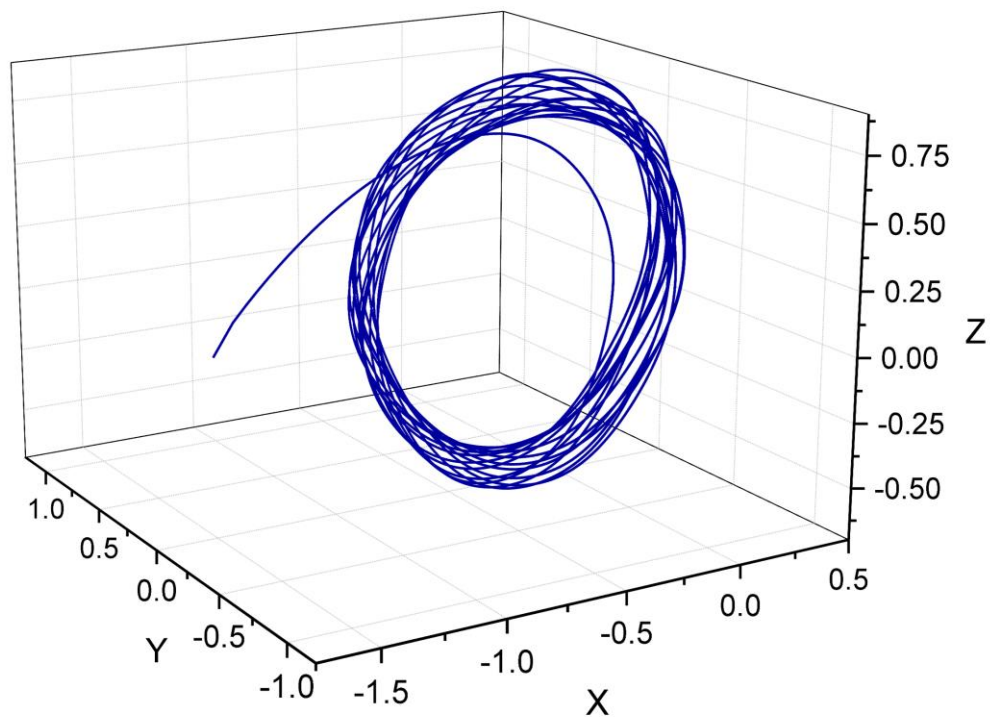


Рис. 14. Пространственная визуализация квази-галло-орбиты в СК с центром в точке L_1 , размерность – млн. км

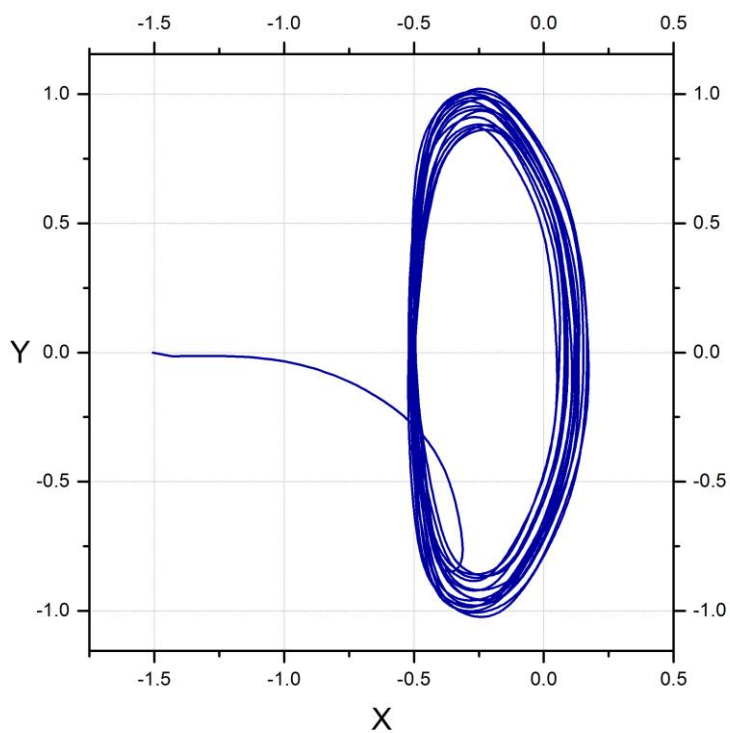


Рис. 15. Проекция квази-гало-орбиты на плоскость XY вращающейся СК с центром в точке L_1 , размерность – млн. км

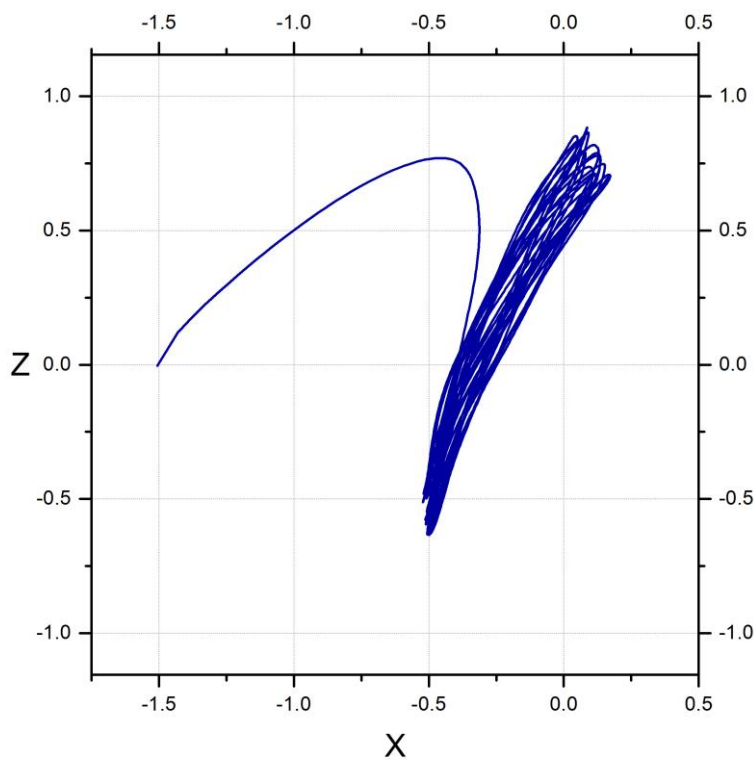


Рис. 16. Проекция квази-гало-орбиты на плоскость XZ вращающейся СК с центром в точке L_1 , размерность – млн. км

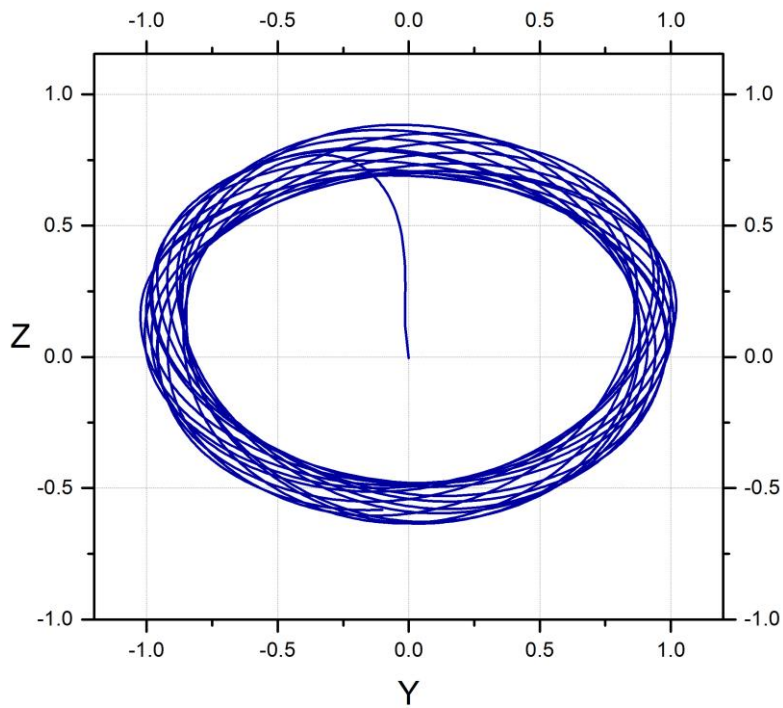


Рис. 17. Проекция квази-гало-орбиты на плоскость YZ вращающейся СК с центром в точке L_1 , размерность – млн. км

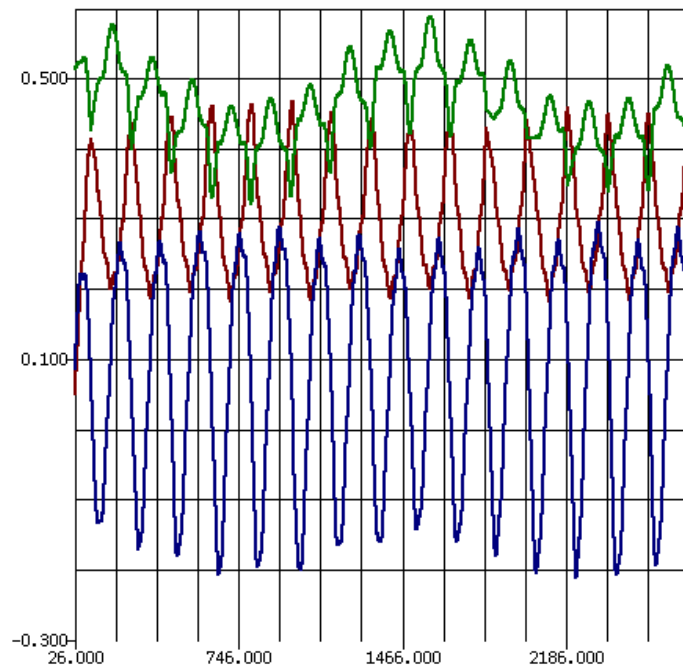


Рис. 18. График эволюции безразмерных параметров θ_A (красный), θ_B (зелёный) и θ_C (синий), характеризующих геометрию и устойчивость представленной орбиты Лиссажу

Из графиков, представленных на рис. 13, 18 видно, что предложенная методика поддержания квазипериодической орбиты позволяет удерживать значение параметра θ_C близким к нулю без прямого контроля его значения. Параметры θ_A, θ_B также остаются в некоторых коридорах значений для обеих орбит. Изменение коэффициента θ_B с течением времени для орбиты Лиссажу демонстрирует характерную для данного класса орбит эволюцию траектории – постепенное вращение плоскости орбиты на некоторый угол относительно плоскости эклиптики с сохранением параметра θ_A .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин И.С. Квазипериодические орбиты в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце-Земля и траектории перелёта к ним в российских космических проектах // диссертационная работа, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2015 URL: <http://www.kiam1.rssi.ru/~ivan/pub.html>
2. Ильин И.С., Сазонов В.В., Тучин А.Г. Гало-орбиты в окрестности точки либрации системы Солнце – Земля // Космические исследования, 2014, №3, С. 201-217.
3. Ильин И.С., Заславский Г.С., Лавренов С.М., Сазонов В.В., Степаньянц В.А., Тучин А.Г., Тучин Д.А., Ярошевский В.С. Баллистическое проектирование траекторий перелёта с орбиты искусственного спутника Земли на гало-орбиту в окрестности точки L_2 системы Солнце – Земля // Космические исследования, 2014, №6, С. 1-13.
4. Боровин Г.К., Ильин И.С., Заславский Г.С., Лавренов С.М., Сазонов В.В., Степаньянц В.А., Тучин А.Г., Тучин Д.А., Ярошевский В.С. Математическое моделирование движения космического аппарата в окрестности точки L_2 системы Солнце – Земля // Инженерный журнал: наука и инновации. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2013, №9 (21)
5. Ильин И.С., Сазонов В.В., Тучин А.Г. Построение ограниченных орбит в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце – Земля // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2012. № 65. С. 1-28.
URL: http://keldysh.ru/papers/2012/prep2012_65.pdf
6. Ильин И.С., Сазонов В.В., Тучин А.Г. Траектории перелета с низкой околоземной орбиты на многообразие ограниченных орбит в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце – Земля // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2012. № 66. С. 1-25.
URL: http://keldysh.ru/papers/2012/prep2012_66.pdf
7. Ильин И.С., Заславский Г.С., Лавренов С.М., Сазонов В.В., Степаньянц В.А., Тучин А.Г., Тучин Д.А., Ярошевский В.С. Баллистическое проектирование траекторий перелёта с орбиты искусственного спутника Земли на гало-орбиту в окрестности точки L_2 системы Солнце – Земля // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 6. С. 1-32.
URL: http://keldysh.ru/papers/2013/prep2013_06.pdf

8. Ильин И.С. Выбор номинальной орбиты КА "Миллиметрон" из семейства периодических орбит в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце – Земля // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 46. С. 1-21.
URL: http://keldysh.ru/papers/2013/prep2013_46.pdf
9. Farquhar R.W. The Control and Use of Libration-Point Satellites // Ph.D. Dissertation, Dept. of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, Stanford, CA, 1968
10. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике // М.: «Наука», 1978.
11. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы // М.: «Наука», 1964.
12. Лидов М.Л., Ляхова В.А., Тесленко Н.М. Одноимпульсный перелёт на условно-периодическую орбиту в окрестности точки L_2 системы Земля-Солнце // Космические исследования, 1987, т 25, №2, С. 163-185.
13. Masdemont J.J. High-order expansions of invariant manifolds of libration point orbits with applications to mission design // Dynamical Systems: An International Journal. Vol. 20, Issue 1, 2005, pp.59-113.
14. Вашковьяк М.А., Лидов М.Л., Маркеев А.П. Полуаналитический метод расчёта движения КА в окрестности коллинеарной точки либрации. // Космические исследования, 1976. Т. 14. №6. С.909
15. Лидов М.Л., Ляхова В.А. Семейства пространственных периодических орбит задачи Хилла и их устойчивость. // Космические исследования, 1983. Т. 21 №1. С. 3.
16. Вашковьяк М.А., Лидов М.Л., Ляхова В.А., Аналитический метод расчёта движения по гало-орбите и проблема экранирования КА от солнечной радиации в проекте «Реликт-2» // Космические исследования, 1994, т 32, №1, С. 3.