

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М.В. КЕЛДЫША
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

ИЛЬИН ИВАН СЕРГЕЕВИЧ

**КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ
В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ L_2
СИСТЕМЫ СОЛНЦЕ-ЗЕМЛЯ
И ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЁТА К НИМ
В РОССИЙСКИХ КОСМИЧЕСКИХ ПРОЕКТАХ**

Специальность 01.02.01 – Теоретическая механика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д.ф.-м.н. Тучин А.Г.

Москва – 2015

Содержание

Введение

4

Глава 1. Динамика в окрестности точки L_2 системы Солнце-Земля в рамках ограниченной круговой задачи трёх тел

- 1.1. Динамика ограниченной круговой задачи трёх тел. Коллинеарная точка либрации L_2 как частное решение ограниченной круговой задачи трёх тел. Семейства периодических орбит в окрестности коллинеарных точек либрации.....13
- 1.2. Применение метода Линдштедта-Пуанкаре для построения периодических орбит...22
- 1.3. Обзор миссий к коллинеарным точкам либрации.....24

Глава 2. Построение начального приближения для множества траекторий перехода с низкой околоземной орбиты на квазипериодическую орбиту в окрестности точки L_2 системы Солнце-Земля с помощью метода изолиний

- 2.1. Метод изолиний функции высоты перицентра от параметров квазипериодической орбиты для прямых переходов на квазипериодические орбиты в окрестности точки L_234
- 2.2. Метод изолиний функции высоты перицентра от параметров квазипериодической орбиты для траекторий перехода на квазипериодические орбиты в окрестности точки L_2 с использованием гравитационного манёвра у Луны.....47
- 2.3. Построение начального приближения для траектории одноимпульсного перелёта с низкой околоземной орбиты на квазипериодическую орбиту в окрестности точки либрации.....61
 - 2.3.1 Алгоритм селекции точек построенных изолиний с учётом сохранения наклонения орбиты выведения для траектории перелёта.....61
 - 2.3.2 Алгоритм селекции точек построенных изолиний с учётом сохранения наклонения орбиты выведения для траектории перелёта.....66

Глава 3. Построение траектории перелёта на квазипериодическую орбиту в рамках полной эфемеридной модели Солнечной системы

- 3.1. Эфемеридная модель Солнечной системы.....74
- 3.2. Построение траектории перелёта с низкой околоземной орбиты на квазипериодическую орбиту в окрестности точки L_2 по начальному приближению в рамках эфемеридной модели Солнечной системы.....77

Глава 4. Поддержание квазипериодической орбиты.....92

Глава 5. Исследование окон старта для миссий «Спектр-РГ» и «Миллиметрон»

- 5.1. Ограничения, наложенные на траектории и ориентацию космических аппаратов «Спектр-РГ» и «Спектр-М».....116
- 5.2. Результаты расчётов окон старта для миссии «Спектр-РГ».....117
- 5.3. Результаты расчётов окон старта для миссии «Миллиметрон».....123

Глава 6. Исследование влияния ошибок выведения и ошибок исполнения манёвров космического аппарата на реализацию миссии

- 6.1. Корректирующие импульсы на этапе перелёта.....129
- 6.2. Корректирующие импульсы на этапе движения космического аппарата по квазипериодической орбите с учётом ошибок исполнения манёвров.....137

Заключение	141
Список рисунков	143
Список таблиц	147
Список использованных источников	148

Введение

Федеральной космической программой предусмотрено размещение двух астрофизических обсерваторий на квазипериодических орбитах в окрестности коллинеарной точки либрации L_2 системы Солнце-Земля для проведения астрофизических исследований. Космическую обсерваторию «Спектр-РГ», предназначенную для изучения Вселенной в гамма- и рентгеновском жёстком диапазоне энергий, планируется вывести на траекторию перелёта к точке либрации в 2016 г. На борту космического аппарата (КА) будет размещена научная аппаратура, разработанная в Институте космических исследований РАН - спектроскоп и временной анализатор галактических и внегалактических излучений ART-XC, а также рентгеновский зеркальный телескоп eROSITA, изготовленный Институтом внеземной физики Общества Макса Планка. Проект «Миллиметрон», предполагающий размещение космической обсерватории «Спектр-М» миллиметрового и инфракрасного диапазонов длин волн с криогенным телескопом диаметром 10 м на квазипериодической орбите в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце-Земля, планируется реализовать после 2019 г. Для изготовления КА «Спектр-РГ» используется платформа «Навигатор», разработанная в НПО им. С.А. Лавочкина, КА «Спектр-М» планируется построить на базе её модифицированной версии.

Различие проектов с баллистической точки зрения обусловлено различием в программах научных экспериментов, приводящим к отличиям в требованиях к рабочим орбитам аппаратов. КА «Спектр-РГ» должен быть размещён на квазипериодической орбите с малой амплитудой в плоскости, ортогональной плоскости эклиптики (не более 600 000 км), в то время как КА «Спектр-М» планируется вывести на квазипериодическую орбиту с большим выходом из плоскости эклиптики (более 800 000 км). Продолжительность обеих миссий составляет 7.5 лет, в течение которых требуется поддержание квазипериодической орбиты заданной амплитуды с помощью коррекций орбиты. Для обеспечения максимальной энергоэффективности миссий переход на квазипериодическую орбиту в окрестности точки L_2 планируется выполнять по одноимпульсной схеме, используя разгонный блок для перехода с низкой околоземной орбиты на траекторию перелёта к точке либрации. На орбиты КА наложены ограничения, связанные с необходимостью поддержания связи с наземными измерительными пунктами, а также с невозможностью нахождения КА в тени Земли в течение продолжительного времени в связи с энергетическими ограничениями.

Из сказанного выше следует, что задача проектирования квазипериодических орбит с заданными геометрическими характеристиками в окрестности коллинеарной

точки либрации L_2 системы Солнце-Земля, а также траекторий перехода на них с низкой околоземной орбиты является весьма актуальной.

Диссертация посвящена решению небесно-механической задачи построения квазипериодических орбит в окрестности коллинеарной либрационной точки L_2 системы Солнце-Земля, в частности, разработке методов и алгоритмов баллистического проектирования квазипериодических орбит с заданными геометрическими характеристиками в окрестности точки L_2 , а также траекторий перехода на них с низкой околоземной орбиты в рамках полной численно-эфемеридной модели Солнечной системы. Разработанные методы универсальны и могут быть применены при проектировании полётов к коллинеарным либрационным точкам различных систем небесных тел.

В рамках поставленной цели решена задача поиска начального приближения для одноимпульсной траектории перелёта на выбранный класс квазипериодических орбит на инвариантном многообразии либрационной точки L_2 в рамках задачи трёх тел. Этот метод опирается на вариант метода продолжения по параметру, предложенный М.Л. Лидовым [Лидов, 1987], и метод Линдштедта-Пуанкаре построения квазипериодических орбит [Richardson, 1980]. Затем, с использованием результатов, полученных на предыдущем этапе, была решена задача расчёта траекторий перелёта на множество квазипериодических орбит в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце-Земля с заданными геометрическими характеристиками, с учётом возмущений от нецентральности поля Земли, гравитационного воздействия Солнца, Луны и планет Солнечной системы, а так же давления солнечной радиации. Для поддержания квазипериодических орбит в рамках полной баллистической модели Солнечной системы необходимо проведение периодических коррекций траектории. В связи с этим решена задача построения энергоэффективного сценария маневрирования, обеспечивающего поддержание квазипериодической орбиты с заданными геометрическими характеристиками в течение заданного периода времени в рамках полной баллистической модели Солнечной системы.

Для выполнения одноимпульсного перехода на компактные орбиты с меньшими амплитудами колебаний в окрестности точки либрации реализован метод построения траекторий перелёта, включающих гравитационный манёвр у Луны. Метод продолжения по параметру удалось распространить на класс траекторий перелёта с гравитационным манёвром.

Для рассчитанных траекторий было выполнено моделирование ошибок выведения и ошибок исполнения двигателями импульсов коррекций для поддержания

квазипериодической орбиты. Для парирования ошибок выведения КА на траекторию перелёта предлагается сценарий из четырёх корректирующих манёвров, проведена оценка затрат характеристической скорости на коррекции для различных отклонений от номинальной траектории при выведении. Ошибки исполнения манёвров поддержания квазипериодической орбиты также приводят к увеличению затрат характеристической скорости, тем не менее, полученные при моделировании оценки лежат в рамках предполагаемого запаса КА.

Финальным этапом в решении поставленной задачи стал массовый расчёт траекторий перелёта и движения КА по квазипериодической орбите заданной геометрии, позволивший построить карты решений, отражающие временное распределение энергоэффективности траекторий для двух типов квазипериодических орбит в выбранном диапазоне дат. Для оптимизации временных затрат на массовый расчёт траекторий было реализовано распараллеливание вычислений на многоядерном сервере.

Научную новизну работы составляют:

- новый метод расчёта одноимпульсных траекторий перелёта на квазипериодические орбиты в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце-Земля с заданными геометрическими характеристиками, позволяющий учитывать возмущения от нецентральной поля Земли, гравитационное воздействие Солнца, Луны и планет Солнечной системы, а также давление солнечной радиации;
- новый метод построения одноимпульсных траекторий перелёта на квазипериодическую орбиту малой амплитуды в окрестности точки L_2 системы Солнце-Земля с использованием гравитационного манёвра у Луны с учётом возмущений от нецентральной поля Земли, гравитационного воздействия Солнца и планет Солнечной системы, а также давления солнечной радиации;
- новый метод расчёта манёвров, обеспечивающий поддержание квазипериодической орбиты заданной геометрии в рамках модели, учитывающей возмущения от нецентральной поля Земли, гравитационное воздействие Солнца, Луны и планет Солнечной системы, а также давление солнечной радиации;
- впервые построенные временные распределения энергоэффективных траекторий, позволяющие находить предпочтительные временные интервалы для запуска КА.

Предложенные для решения поставленных задач методы и алгоритмы реализованы в виде программного комплекса, используемого для баллистического проектирования траекторий для проектов «Спектр-РГ» и «Миллиметрон», предполагающих размещение космического аппарата на квазипериодических орбитах в окрестности точки L_2 системы

Солнце-Земля. Расчёт траекторий космического аппарата выполняется в рамках эфемеридной модели Солнечной системы, разработанной и используемой в Баллистическом Центре ИПМ для баллистико-навигационного обеспечения полёта КА «Спектр-Р», серии МКА, а так же при проектировании будущих миссий.

С помощью программного комплекса в рамках полной баллистической модели Солнечной системы: впервые рассчитано множество квазипериодических орбит, имеющих большую амплитуду в направлении, ортогональном плоскости эклиптики, отвечающее требованиям проекта «Миллиметрон»; построено множество квазипериодических орбит, отвечающее требованиям проекта «Спектр-РГ»; построены карты полученных решений, позволившие установить структуру временного и энергетического распределения траекторий перехода на квазипериодические орбиты различных типов и определить оптимальные окна старта для миссий «Спектр-РГ» и «Миллиметрон».

Из сказанного выше следует, что в рамках диссертационной работы решена важная прикладная задача проектирования квазипериодических орбит с заданными геометрическими характеристиками в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце-Земля, а также траекторий перехода на них с низкой околоземной орбиты, что позволило рассчитать траектории для миссий «Спектр-РГ» и «Миллиметрон», принятые на момент написания диссертационной работы в качестве номинальных.

Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором на следующих семинарах и конференциях:

- The Third Moscow Solar System Symposium 3M-S3, Институт космических исследований РАН. The ballistic support of the “Spectr-RG” spacecraft flight to the L_2 point of the Sun-Earth system, 8-12 октября 2012 г., Москва, Россия.
- International Conference “Developing Space”. Guidance and ballistic support of spacecraft flight to the Sun-Earth system L_2 point, 17-19 декабря 2012 г., Париж, Франция.
- XXXVII Королёвские чтения, секция «Прикладная небесная механика и управление движением». Баллистическое проектирование полета космического аппарата к точке L_2 системы Солнце-Земля, 29 января – 1 февраля 2013 г., Москва, Россия.
- II Международная конференция «Высокопроизводительные вычисления – математические модели и алгоритмы», БФУ им. И. Канта. Математическое моделирование квазипериодического движения космического аппарата в

окрестности точки L_2 системы Солнце-Земля, 3-5 октября 2013 г., Калининград, Россия.

- The Fourth Moscow Solar System Symposium 4M-S3, Институт космических исследований РАН. Quasi periodic orbits in the vicinity of the Sun-Earth system L_2 point and their implementation in “Spectr-RG” and “Millimetron” missions, 14-18 октября 2013 г., Москва, Россия.
- 24th International Symposium on Space Flight Dynamics, John Hopkins University, Applied Physics Laboratory. Quasi-periodic orbits in the vicinity of the Sun-Earth system L_2 point and their implementation in “Spectr-RG” and “Millimetron” missions, 5-9 мая 2014 г., Лаурел, Мэриленд, США.
- 65th International Astronautical Congress, Astrodynamics Symposium, отделение “Mission design, operations and optimization”. Quasi-periodic orbits in the vicinity of the Sun-Earth system L_2 point and their implementation in “Spectr-RG” and “Millimetron” missions, 29 сентября – 3 октября 2014 г., Торонто, Канада.
- Семинар по механике, управлению и информатике Института Космических Исследований РАН. Руководитель: д.ф.-м.н. Р.Р. Назиров, 17 декабря 2014 г., Москва, Россия.
- Расширенный семинар отдела № 5 «Механика космического полёта и управление движением» Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Руководитель: проф. Ю.Ф. Голубев, 12 февраля, 2015 г., Москва, Россия.

Основные результаты диссертации изложены в трёх печатных работах и изданиях, рекомендованных ВАК [Ильин, 2014a], [Ильин, 2014b], [Ильин, 2014c], а также в четырёх препринтах ИПМ им. М.В. Келдыша [Ильин, 2012a], [Ильин, 2012b], [Ильин, 2013a], [Ильин, 2013b].

Диссертация состоит из введения, шести глав и заключения, содержащего основные результаты, полученные в ходе исследования. Полный объем диссертации составляет 153 страницы с 82 рисунками и 11 таблицами. Список использованных источников содержит 62 наименования.

Первая глава диссертации начинается с краткого обзора методов построения периодических и квазипериодических орбит в рамках задачи трёх тел. Затем рассматривается динамика задачи трёх тел – модели, в рамках которой строится начальное приближение квазипериодической орбиты и траектории одноимпульсного перелёта на неё. Рассматривается система уравнений движения задачи, находится её стационарное решение, соответствующее точке либрации L_2 . Выписывается решение

системы линеаризованных в малой окрестности точки L_2 уравнений движения, описывающее малые пространственные колебания материальной точки около положения равновесия. Приводится классификация периодических и квазипериодических решений задачи трёх тел в окрестности коллинеарной точки либрации L_2 , рассматривается метод аналитического построения периодических гало орбит, предложенный Ричардсоном [Richardson, 1980] и опирающийся на метод Линдштедта-Пуанкаре, частично использованный в данной работе. В заключение приводится обзор реализованных миссий к коллинеарным точкам либрации с точки зрения использованных методов построения и поддержания квазипериодических орбит.

Вторая глава посвящена построению начального приближения для множества траекторий перехода с низкой околоземной орбиты на квазипериодическую орбиту в окрестности точки L_2 системы Солнце-Земля с помощью варианта метода продолжения по параметру, получившего название «метод изолиний». Рассматривается построение прямых перелётов и перелётов с гравитационным манёвром у Луны – последний вариант позволяет осуществить переход на квазипериодические орбиты малой амплитуды. Также в главе приводится методика привязки полученного начального приближения к дате старта и выбор наклона траектории перелёта, совпадающего с экваториальным наклоном орбиты выведения для данной даты.

В третьей главе рассматривается методика и алгоритмы построения траектории перелёта на квазипериодическую орбиту в полной численно-эфемеридной модели Солнечной системы, приводится описание используемой модели движения КА.

Четвёртая глава содержит краткий обзор методов расчёта коррекций поддержания квазипериодической орбиты в окрестности коллинеарных точек либрации. Основное содержание главы составляют описание разработанного алгоритма расчёта коррекций поддержания квазипериодической орбиты, а также результаты расчёта – траектории для проектов «Спектр-РГ» и «Миллиметрон», содержащие участок перелёта с низкой околоземной орбиты и движение по квазипериодической траектории в окрестности точки либрации.

Пятая глава посвящена исследованию временного и энергетического распределения траекторий перехода на квазипериодические орбиты различных типов, позволяющему определить оптимальные окна старта для миссий «Спектр-РГ» и «Миллиметрон».

В шестой главе производится моделирование ошибок выведения и ошибок исполнения двигателями импульсов коррекций и выполняется расчёт импульсов коррекций, позволяющих парировать указанные ошибки таким образом, чтобы остаться в

заданной окрестности номинальной траектории. При моделировании ошибок выведения рассматриваются сценарии с различными значениями отклонений от номинальной траектории, для получения реалистичных оценок корректирующих импульсов проводится статистическое моделирование. Ошибки исполнения манёвров поддержания квазипериодической орбиты полагаются равными 10% по модулю импульса и 0.5° по направлению, в этом предположении рассчитывается сценарий маневрирования, позволяющий удерживать КА на заданной орбите в течение запланированного периода времени. Суммарные затраты характеристической скорости на поддержание квазипериодической орбиты возрастают в 3-4 раза, однако остаются в пределах предполагаемого запаса.

В заключении приводятся основные результаты диссертационной работы.

Глава 1

Динамика в окрестности точки L_2 в рамках ограниченной круговой задачи трёх тел

Точки либрации – стационарные решения известной небесно-механической задачи трёх тел – модельной задачи, рассматривающей динамику материальной точки в гравитационном поле двух небесных тел, одно из которых движется по круговой или эллиптической орбите относительно другого, при этом гравитационное воздействие материальной точки на небесные тела не учитывается. Существует пять стационарных решений уравнений движения задачи трёх тел – три коллинеарные либрационные точки и две треугольные. Существование коллинеарных либрационных точек L_1 , L_2 , L_3 было показано Леонардом Эйлером в 1767 г [Euler, 1767], а в 1772 г Жозеф Луи Лагранж [Lagrange, 1772] доказал наличие еще двух стационарных решений задачи – треугольных точек либрации L_4 и L_5 . Анри Пуанкаре [Poincaré, 1890] исследовал динамику задачи трёх тел и впервые показал существование периодических орбит в окрестности коллинеарных точек либрации. Развитие этого исследования содержится в его работе «Новые методы небесной механики» [Poincaré, 1897], положившей начало теории динамических систем. Идея использования периодических и квазипериодических орбит в окрестности коллинеарных точек либрации для размещения космических аппаратов принадлежит Роберту Фаркуа – в своей диссертации [Farquar, 1968] он описал инженерную методику построения периодических пространственных орбит, названных им «гало-орбитами», в окрестности точки либрации L_1 системы Земля-Луна. В данной работе для поддержания орбиты используется метод удержания КА на выбранной номинальной траектории, в такой постановке подробно рассматривается вопрос расчёта коррекций поддержания квазипериодической орбиты с малыми амплитудами, исследуются вопросы устойчивости полученного решения. Через несколько лет в работе [Farquar, 1973] с помощью метода Линдштедта-Пуанкаре было получено аналитическое решение – разложение для квазипериодических пространственных орбит в окрестности либрационной точки L_2 системы Солнце-Земля. В работе [Richardson, 1975] с помощью метода Линдштедта-Пуанкаре было найдено разложение третьего порядка для периодических пространственных гало-орбит в окрестности либрационных точек L_1 и L_2 системы Солнце-Земля. В отечественной небесной механике исследования динамики в окрестности коллинеарных точек либрации представлены серией работ М.Л. Лидова [Лидов, 1976], [Лидов, 1983], [Лидов, 1987], [Лидов, 1994] – в частности, был предложен метод получения

нормальной формы гамильтониана системы для описания гало-орбит, а также использованный в данной работе метод построения изолиний функции высоты перицентра геоцентрической траектории перелёта от параметров условно-периодической орбиты, позволяющий строить одноимпульсные траектории перелёта в окрестность либрационной точки в рамках ограниченной круговой задачи трёх тел.

В последующие годы было опубликовано множество работ, рассматривающих вопросы построения гало-орбит и квазипериодических орбит в окрестности коллинеарных либрационных точек. Вопрос получения достаточно точной аппроксимации для гало-орбит обычно рассматривается в рамках ограниченной задачи трёх тел и решается с помощью полуаналитических методов, таких как метод Линдштедта-Пуанкаре перенормировки независимого параметра и разложения решения в ряд по степеням амплитуд с исключением вековых членов с помощью специального выбора значений частот колебаний [Richardson, 1980], или же метод сведения решения к центральному многообразию и получения разложения для нормальной формы гамильтониана задачи [Masdemont, 2005]. Барселонская школа небесной механики внесла значительный вклад в развитие теории динамических систем в приложении к исследованию динамики ограниченной задачи трёх тел [Simo, 1986], [Jorba, 1999], [Gomez, 2001a], [Gomez, 2001b], [Gomez, 2004]. В работе [Masdemont, 2003] было показано, что наиболее экономичные траектории перелёта на квазипериодические орбиты принадлежат инвариантному многообразию коллинеарной либрационной точки – при проектировании современных миссий для построения траекторий одноимпульсных перелётов к точкам либрации используется именно это свойство динамики системы. В диссертационной работе [Olikara, 2010] предложен метод построения двумерных торов, содержащих квазипериодические орбиты и траектории перелёта на них, а также метод расчёта принадлежащих торам траекторий в рамках ограниченной круговой задачи трёх тел, рассматриваемой с точки зрения теории динамических систем.

Однако вопрос переноса решений, полученных в рамках задачи трёх тел, в полную численно-эфемеридную модель, используемую для баллистического проектирования миссии, предполагающей перелёт к коллинеарной точке либрации и размещение аппарата на одной из орбит, принадлежащих её центральному многообразию, часто остается не освещённым. Одним из основных результатов диссертации является разработка полного алгоритма, включающего в себя все этапы проектирования квазипериодических орбит в окрестности коллинеарных точек либрации.

1.1 Динамика ограниченной круговой задачи трёх тел. Коллинеарная точка либрации L_2 как частное решение ограниченной круговой задачи трёх тел

Рассмотрим движение трёх материальных точек с массами m_1 , m_2 и m , притягивающихся по закону Ньютона. Сами точки также будем обозначать буквами m_1 , m_2 и m . Полагаем, что $m_1 > m_2$ и что масса m исчезающе мала по сравнению с m_1 и m_2 , т.е. точка m не влияет на движение точек m_1 и m_2 . Движение двух последних точек считаем круговым.

Радиус-векторы точек m_1 , m_2 и m в некоторой инерциальной системе отсчёта обозначим $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}$. Уравнения движения точек имеют вид

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{\gamma m_2 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{\gamma m_1 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\gamma m_1 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} - \frac{\gamma m_2 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3}. \quad (1.1)$$

Здесь точка над символом означает дифференцирование по времени t , γ – постоянная тяготения. Положим $\mathbf{R} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_2$. Вычитая первое уравнение системы (1.1) из её второго уравнения, получим уравнение относительно $\mathbf{R}$:

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{\gamma(m_1 + m_2)\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3}. \quad (1.2)$$

Вычтем второе уравнение (1.1) из последнего уравнения этой системы. Получим:

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{\gamma m_2 \boldsymbol{\rho}}{|\boldsymbol{\rho}|^3} + \gamma m_1 \left(\frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} - \frac{\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}}{|\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}|^3} \right). \quad (1.3)$$

Возьмём произвольное решение $\mathbf{R}(t)$ уравнения (1.2), не обязательно описывающее круговые орбиты точек m_1 и m_2 . Будем искать частное решение уравнения (1.3) в виде $\boldsymbol{\rho} = x\mathbf{R}(t)$, где $x = \text{const}$. Подставим выписанное выражение для $\boldsymbol{\rho}$ в уравнение (1.3) и учтём, что $\ddot{\boldsymbol{\rho}} = x\ddot{\mathbf{R}}(t) = -\gamma(m_1 + m_2)\mathbf{R}(t)|\mathbf{R}(t)|^{-3}$. После несложных преобразований получим уравнение, определяющее значения x :

$$-(m_1 + m_2)x = -\frac{m_2}{x^2} + \frac{m_1 x(2 + x)}{(1 + x)^2}. \quad (1.4)$$

Выписанное уравнение приводится к алгебраическому уравнению пятой степени, которое всегда имеет три действительных корня [Маркеев, 1978]. Они лежат в интервалах $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ и $(0, +\infty)$. Частные решения уравнения (1.3), отвечающие этим корням, называются коллинеарными, или эйлеровыми точками либрации. Ниже рассматривается корень из интервала $(0, +\infty)$, задающий точку либрации, традиционно обозначаемую L_2 .

Исследование проводится для точек m_1 и m_2 , служащих моделью системы Солнце – Земля. При этом под m_2 и $\mathbf{r}_2$ понимаются масса и радиус-вектор барицентра системы Земля – Луна, решение уравнения (1.2) – круговая орбита, $R = |\mathbf{R}| = \text{const}$, $R \approx 1.496 \cdot 10^{11}$ м,

$$n_0 = \sqrt{\frac{\gamma(m_1 + m_2)}{R^3}} \approx 1.991 \cdot 10^{-7} \text{ с.}$$

В дальнейшем удобно использовать параметр $\mu = m_2(m_1 + m_2)^{-1}$. Система Солнце – Земля характеризуется значением $\mu = 3.040424 \cdot 10^{-6}$. Корень уравнения (1.4), отвечающий точке либрации L_2 , обозначим x_0 . При $\mu \ll 1$ его удобно находить, решая методом простой итерации уравнение

$$x = \sqrt[3]{\frac{\mu(1+x)^2}{3-2\mu+(3-\mu)x+x^2}}.$$

Это уравнение эквивалентно (1.4), начальное приближение искомого корня следует взять в виде $x = \sqrt[3]{\mu/3}$. В рассматриваемом случае $x_0 = 1.007824 \cdot 10^{-2}$.

Для исследования движения точки m в окрестности точки либрации L_2 уравнение (1.3) запишем в скалярной форме в декартовой системе координат, которую обозначим m_2xyz . Начало этой системы находится в точке m_2 , орты ее базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ определены соотношениями

$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad \mathbf{k} = \frac{\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}}{|\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}|}, \quad \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}. \quad (1.5)$$

Как нетрудно видеть,

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = n_0 \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = -n_0 \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} = \text{const}. \quad (1.6)$$

где n_0 - среднее движение.

Ниже в данном пункте компоненты векторов и координаты точек указываются в системе m_2xyz . В частности, $L_2 = (x_0 R, 0, 0)$.

Положим $\mathbf{r}/R = (x, y, z)$ и введём безразмерное время $\tau = n_0 t$, дифференцирование по которому будем обозначать штрихом. Тогда уравнения (1.3) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}
x'' - 2y' + \left(\frac{\mu}{r^3} + \frac{1-\mu}{r_1^3} - 1 \right) x &= (1-\mu) \left(1 - \frac{1}{r_1^3} \right), \\
y'' + 2x' + \left(\frac{\mu}{r^3} + \frac{1-\mu}{r_1^3} - 1 \right) y &= 0, \quad z'' + \left(\frac{\mu}{r^3} + \frac{1-\mu}{r_1^3} \right) z = 0,
\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r_1 = \sqrt{(1+x)^2 + y^2 + z^2}.$$

Уравнения (1.7) допускают первый интеграл (интеграл Якоби)

$$J = \frac{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - x^2 - y^2}{2} - (1-\mu)x - \frac{\mu}{r^3} - \frac{1-\mu}{r_1^3}$$

и инвариантны относительно преобразования переменных

$$\tau \rightarrow -\tau, \quad y \rightarrow -y. \tag{1.8}$$

Точке либрации L_2 отвечает положение равновесия (стационарное решение) системы (1.7)

$x = x_0, \quad y = z = 0$. Малые колебания точки m в окрестности точки L_2 описываются линеаризованными уравнениями

$$\Delta x'' - 2y' - (2a+1)\Delta x = 0,$$

$$y'' + 2\Delta x' + (a-1)y = 0,$$

$$z'' + az = 0,$$

$$\text{где } \Delta x = x - x_0,$$

$$a = \frac{\mu}{x_0^3} + \frac{1-\mu}{(1+x_0)^3} = 3.940522.$$

Выпишем характеристические уравнения для движения в плоскости XU и для движения по оси OZ . Вместо традиционного для собственных значений обозначения λ будем использовать обозначение α .

$$0 = \alpha_{xy}^4 - \alpha_{xy}^2(a-2) - (2a+1)(a-1)$$

$$0 = \alpha_z^2 + a$$

Корни первого уравнения состоят из пары действительных значений, равных по величине и противоположных по знаку, и пары комплексно-сопряжённых чисто мнимых корней. Собственные значения имеют вид:

$$\alpha_{xy} = \pm \lambda, \pm i\omega$$

$$\alpha_z = \pm i\sqrt{a}$$

где λ, ω – положительные действительные числа. Подтвердим эти вычисления.

Для первых двух уравнений системы введём новые переменные: $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, y_1 = y, y_2 = \dot{y}$. Тогда система примет вид:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = 2y_2 + (1+2a)x_1$$

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = -2x_2 + (1-a)y_1$$

В матричной форме

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1+2a & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1-a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Характеристическая матрица системы имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -1 & 0 & 0 \\ -2a-1 & \alpha & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \alpha & -1 \\ 0 & 2 & a-1 & \alpha \end{bmatrix}$$

Выпишем характеристический многочлен:

$$\alpha^4 + (2-a)\alpha^2 - 2a^2 + a + 1$$

Собственные значения системы имеют вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{9a^2 - 8a} + 2a - 4} \\ & -\frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{9a^2 - 8a} + 2a - 4} \\ & \frac{1}{2} \sqrt{-2\sqrt{9a^2 - 8a} + 2a - 4} \\ & -\frac{1}{2} \sqrt{-2\sqrt{9a^2 - 8a} + 2a - 4} \end{aligned}$$

Общее решение линеаризованных уравнений имеет вид (см. [Маркеев, 1978])

$$\begin{aligned}\Delta x &= c_1 e^{\lambda \tau} + c_2 e^{-\lambda \tau} + c_3 \cos \omega \tau + c_4 \sin \omega \tau \\ y &= k_1 (c_1 e^{\lambda \tau} - c_2 e^{-\lambda \tau}) + k_2 (c_3 \sin \omega \tau - c_4 \cos \omega \tau) \\ z &= c_5 \cos \sqrt{a} \tau + c_6 \sin \sqrt{a} \tau\end{aligned}\tag{1.9}$$

Здесь $c_1, \dots, c_6$ – произвольные постоянные интегрирования,

$$\begin{aligned}\lambda &= \sqrt{\frac{\sqrt{9a^2 - 8a} + a - 2}{2}} \approx 2.484317, \\ \omega &= \sqrt{\frac{\sqrt{9a^2 - 8a} - a + 2}{2}} \approx 2.057014, \\ k_1 &= \frac{\lambda^2 - 2a - 1}{2\lambda} = -\frac{2\lambda}{\lambda^2 + a - 1} \approx -0.5452636, \\ k_2 &= -\frac{2\omega}{\omega^2 - a + 1} = -\frac{\omega^2 + 2a + 1}{2\omega} \approx -3.187229.\end{aligned}$$

Для упрощения дальнейшего изложения выполним переход к более удобным переменным интегрирования, воспользовавшись следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{c_3^2 + c_4^2}, \quad B = \sqrt{c_5^2 + c_6^2}, \quad C = c_1, \quad D = c_2, \\ \cos \varphi_1 &= \frac{c_3}{\sqrt{c_3^2 + c_4^2}}, \quad \sin \varphi_1 = -\frac{c_4}{\sqrt{c_3^2 + c_4^2}}, \\ \cos \varphi_2 &= \frac{c_5}{\sqrt{c_5^2 + c_6^2}}, \quad \sin \varphi_2 = -\frac{c_6}{\sqrt{c_5^2 + c_6^2}}.\end{aligned}$$

Тогда решение системы линеаризованных дифференциальных уравнений, описывающих движение в малой окрестности точки L_2 , запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C e^{\lambda t} + D e^{-\lambda t} \\ \xi_2 &= -k_2 A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + k_1 (C e^{\lambda t} - D e^{-\lambda t}) \\ \xi_3 &= B \cos(\omega_2 t + \varphi_2)\end{aligned}\tag{1.10}$$

Такая запись позволяет выделить в явном виде периодические колебания в плоскости XU - амплитуда задаётся коэффициентом A , частота - ω_1 , фаза - φ_1 , и колебания в ортогональной плоскости с частотой ω_2 , фазой φ_2 и коэффициентом B , определяющим амплитуду. Коэффициенты C и D соответствуют экспоненциальному уходу от периодического решения в положительном и отрицательном времени.

Поскольку собственные значения матрицы системы линеаризованных уравнений движения ограниченной круговой задачи трёх тел в трёх коллинеарных точках либрации принимают значения $\{\pm i\omega_1, \pm i\omega_2, \lambda\}$, $\omega_1, \omega_2, \lambda > 0$, согласно теории устойчивости Ляпунова в линейном приближении это особые точки типа центр $\times$ центр $\times$ седло. Так как система дифференциальных уравнений движения автономна, обладает первым интегралом и стационарным решением, к ней можно применить теорему Ляпунова о существовании периодических решений, называемых обычно его именем [Дубошин, 1964]. Согласно теореме Ляпунова, благодаря наличию части центр $\times$ центр, в случае выполнения условия $\frac{\omega_2}{\omega_1} \neq k$, где k – целое число, каждая коллинеарная равновесная точка производит два однопараметрических семейства периодических орбит, известных как семейства плоских или вертикальных периодических орбит Ляпунова. Семейство плоских орбит имеет период $T \approx 2\pi / \omega_1$ и близко решениям линеаризованных уравнений движения при $B = C = D = 0$. В решениях этого семейства $z \equiv 0$ – материальная точка не покидает плоскости XU . Семейство вертикальных орбит имеет период $T \approx 2\pi / \omega_2$ и близко решениям (1.10) при $A = C = D = 0$.

При возрастании энергии (амплитуд колебаний) линейная устойчивость орбит меняется, и, наряду с семействами периодических орбит Ляпунова, возникают бифуркационные орбиты, среди которых появляются другие семейства периодических орбит. Первое семейство, отделяющееся от семейства плоских орбит Ляпунова, относится к трёхмерным периодическим орбитам, симметричным относительно плоскости $y = 0$ – это так называемые гало-орбиты. Периодичность гало-орбит обусловлена совпадением частот колебаний в плоскости XU и по оси OZ : $\omega_1 = \omega_2$. Порождаются два семейства гало-орбит, северное и южное. Название этих семейств происходит из того факта, что в проекции на плоскость YZ вращающейся системы координат, этот класс орбит с Земли выглядит как гало вокруг Солнца (для точки L_1).

Если отношение частот колебаний в различных плоскостях является иррациональным числом, движение принимает квазипериодический характер – период замыкания траектории стремится к бесконечности. При фиксированном уровне энергии

квазипериодические орбиты принадлежат двухпараметрическому семейству двумерных торов. В случае близости частот и амплитуд колебаний пространственному периодическому решению – гало-орбите – квазипериодическая траектория лежит в окрестности периодической гало-орбиты на поверхности двумерного тора. Такие траектории будем называть квази гало-орбитами, проектирование именно этого класса орбит рассматривается в работе. Если же амплитуды колебаний невелики, а частоты различаются существенным образом, траектория движения называется орбитой Лиссажу. Орбиты Лиссажу принадлежат двухпараметрическому семейству двумерных торов, соединяющему два семейства орбит Ляпунова.

При рассмотрении всех энергетических уровней вокруг точек либрации возникают четырёхмерные центральные (с нейтральной устойчивостью) многообразия. При выборе фиксированного значения энергии системы они превращаются в трёхмерные многообразия с нейтральной динамикой. Все объекты центрального многообразия наследуют неустойчивость соответствующей коллинеарной точки либрации. У каждого из них есть устойчивое и неустойчивое многообразие размерности, на единицу превышающей размерность орбиты, с которой они связаны [Masdemont, 2005].

Рис. 1.1 [Kolemen, 2006] изображает вышеописанные классы орбит в окрестности точки либрации L_2 . Черным цветом обозначено положение Земли и орбита Луны. Синим цветом – плоская орбита Ляпунова (лежит в плоскости эклиптики) и вертикальная орбита Ляпунова, ортогональная плоскости эклиптики. Вокруг неё зелёным цветом – квазипериодическая орбита Лиссажу. Красным цветом изображена квазипериодическая гало-орбита, лежащая в окрестности периодической гало-орбиты (черный цвет).

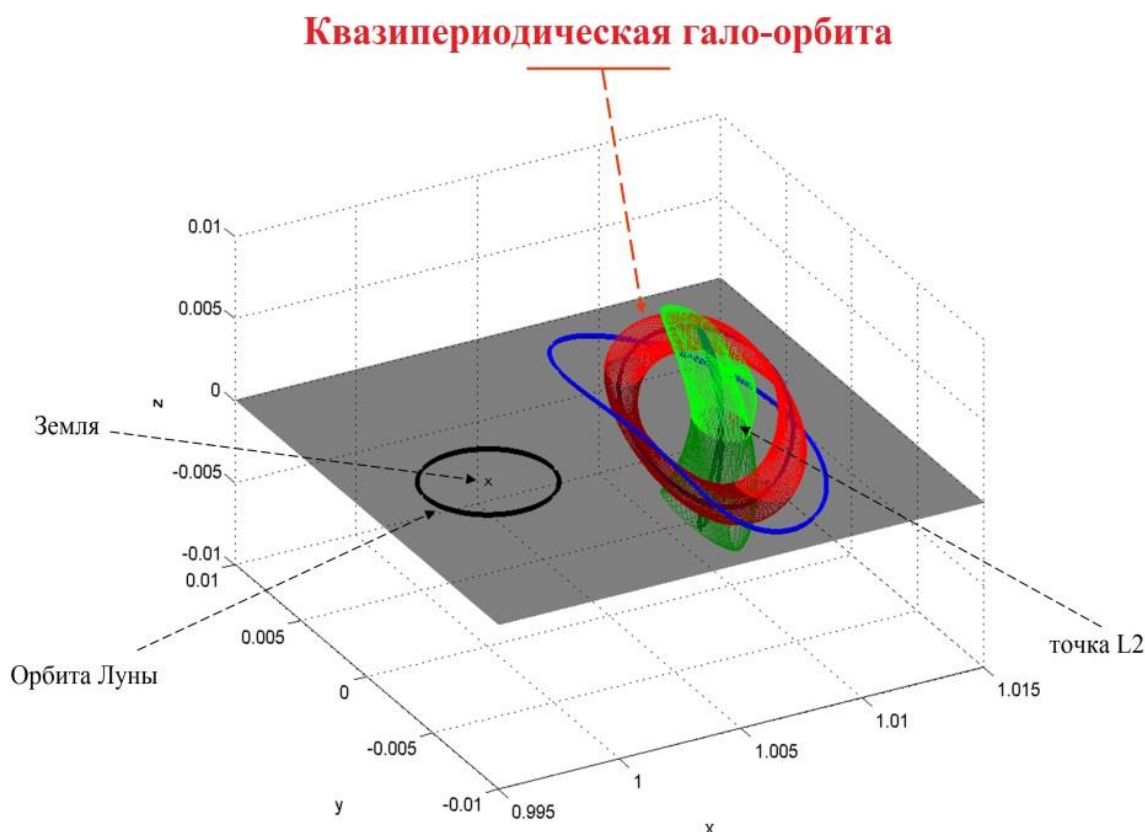


Рис. 1.1 Семейства периодических и квазипериодических орбит в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце–Земля. Размерность по осям – а.е.

Нелинейное поведение системы при увлечении энергии (росте амплитуд колебаний) необходимо исследовать более тонкими методами, чем линеаризация уравнений движения в малой окрестности положения равновесия системы. Существует два подхода к решению этой задачи: аналитический и численный.

В качестве примера аналитического подхода можно назвать метод Линдштедта-Пуанкаре разложения решения в ряд по степеням амплитуд колебаний для построения приближения высокого порядка к периодическому решению – подобный подход использован, в частности, в работе [Richardson, 1980]. Численный подход используется для точного вычисления орбит (периодических или квазипериодических), принадлежащих центральному многообразию системы.

Седловая компонента фазового потока исследуемой системы дифференциальных уравнений, соответствующая положительному собственному значению λ , сообщает окрестности точек либрации динамику неустойчивого равновесия. В частности, для точек L_1 и L_2 собственное значение λ велико и наблюдается ярко выраженная неустойчивость, вследствие чего невозможно представить фазовое пространство в окрестности этих точек с

помощью отображения Пуанкаре (сечения множества решений выбранной плоскостью), построенного с использованием прямого численного моделирования.

Рассмотрим частные решения системы линеаризованных уравнений движения (1.10), соответствующие действительным собственным значениям – векторы w_1, w_2 :

$$\begin{aligned} w_1 &= C \begin{pmatrix} 1 \\ k_1 \end{pmatrix} e^{\lambda t} \\ w_2 &= D \begin{pmatrix} 1 \\ -k_1 \end{pmatrix} e^{-\lambda t} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Используя значения k_1 , нетрудно вычислить направления данных векторов, определяющие направления ухода от периодических решений в положительном и отрицательном времени по экспоненциальному закону (рис. 1.2).

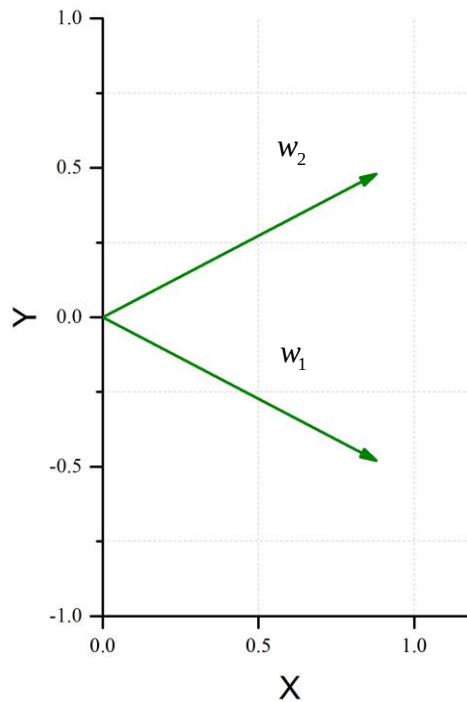


Рис.1.2 Единичные векторы, задающие направления экспоненциального ухода от периодического решения в эклиптической СК с центром в точке L_2

Обобщая данные наблюдения с точки зрения теории динамических систем, можно сформулировать следующее: коллинеарные точки либрации с гиперболическим характером неустойчивости $L_i, i = 1, 2, 3$ имеют два связанных одномерных инвариантных многообразия, каждое с двумя ветвями. В линейном приближении потока, одна ветвь неустойчивого многообразия W_-^u уходит в область $\{x < x_{L_i}, y > 0\}$, а другая ветвь W_+^u уходит в область $\{x > x_{L_i}, y < 0\}$. Благодаря симметрии ограниченной круговой задачи трёх

тел, устойчивые ветви W_-^s, W_+^s приходят из областей $\{x < x_{L_i}, y < 0\}$, $\{x > x_{L_i}, y > 0\}$ соответственно [Conley, 1968].

Поскольку коллинеарные точки либрации носят гиперболический характер неустойчивости, орбиты семейств Ляпунова, так же как и гало-орбиты, наследуют гиперболический характер и периодические орбиты имеют устойчивое и неустойчивое многообразия, W^s и W^u соответственно, с поведением, похожим на вышеописанное. Эти многообразия представляют собой двумерные цилиндры $R \times S^1$. Геометрически их можно рассматривать как двумерные трубки, приближающиеся (в положительном и отрицательном направлениях по времени) к периодической орбите, то есть траектории, принадлежащие инвариантным многообразиям, стремятся (в положительном и отрицательном направлениях) к периодической орбите.

Если в качестве рабочей орбиты космического аппарата выбирается орбита на центральном многообразии (орбита Лиссажу или гало-орбита), тогда орбиты её устойчивого многообразия естественным образом следует использовать в качестве орбит для перелёта с низкой околоземной орбиты на выбранную орбиту в окрестности точки либрации. Поиск начального приближения для траектории перелёта с помощью метода изолиний функции высоты перицентра траектории перелёта на квазипериодическую орбиту от параметров этой орбиты использует именно это свойство динамики системы – траектория перелёта ищется на ветви устойчивого многообразия, заданной компонентой $De^{-\lambda t}$ решения системы линеаризованных уравнений движения задачи трёх тел. При продолжении решения в отрицательном времени траектория движения подходит близко к Земле, пересекая орбиту выведения КА.

1.2 Применение метода Линдштедта-Пуанкаре для построения периодических орбит

Наиболее подходящую для практического применения геометрию имеют квази гало-орбиты – они не пересекают конус земной тени, в отличие от орбит Лиссажу, что позволяет соблюсти необходимый режим освещенности солнечных панелей аппарата. Квази гало-орбиты лежат в окрестности периодических гало-орбит, поэтому при их проектировании целесообразно учитывать соотношение амплитуд и частот колебаний в плоскости эклиптики и в плоскости, ей ортогональной, порождающее периодические гало-орбиты. Учёт этих соотношений при проектировании квазипериодических орбит для проекта «Спектр-РГ» позволил построить квази гало-орбиты с желаемой геометрией, требующие меньших затрат характеристической скорости на поддержание

квазипериодического движения по сравнению с орбитами, для построения которых использовалось только линеаризованное приближение, описывающее движение в малой окрестности точки либрации в общем случае.

Рассмотрим основные идеи метода Ричардсона [Richardson, 1980] построения локального аналитического приближения более высокого порядка, чем линейное, для периодических гало-орбит в окрестности точки L_2 . Гало-орбиты возникают при амплитудах колебаний, достаточных, для того, чтобы нелинейный вклад в систему дал равные собственные значения $\omega_1 = \omega_2$. Амплитуды колебаний при этом оказываются связанными определённым нелинейным алгебраическим отношением, получаемым с помощью теории возмущений. Фазы также связаны линейным соотношением.

Уравнения движения материальной точки в задаче трёх тел записываются в форме Лагранжа. Потенциалы двух массивных тел можно рассматривать в качестве возмущающих потенциалов и разлагать в степенной ряд по параметрам $\frac{|\rho|}{|r_1|}, \frac{|\rho|}{|r_2|}$, где ρ - радиус-вектор материальной точки m относительно коллинеарной точки либрации, $r_{1,2}$ - радиус-векторы тел m_1, m_2 . Эти разложения лагранжиана справедливы до тех пор, пока $\frac{|\rho|}{|r_1|} < 1$ и $\frac{|\rho|}{|r_2|} < 1$. Затем проводится процедура нормировки, вводится система безразмерных единиц. Лагранжиан записывается в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра. Далее с помощью полученного представления уравнения Лагранжа записываются уравнения движения материальной точки в окрестности точки либрации. Находится приближение третьего порядка для решения полученной системы дифференциальных уравнений. В уравнение по z координате вводится малая поправка, такая, что $\Delta = O(A_z^2)$, поэтому вклад Δz в решение следует учитывать в разложении начиная с третьего порядка.

Метод Линдштедта-Пуанкаре применяется для того, чтобы убрать вековые члены, появляющиеся в разложении – вместо времени вводится новая независимая переменная, связанная линейным соотношением с новой частотой, содержащей подобранные специальным образом поправки. Каждый член поправки к частоте выбирается при разложении таким образом, чтобы исключить из выражения появляющиеся вековые члены. Уравнения переписываются в новых переменных, после чего строятся последовательные приближения к их решению. Однако вековые члены, появляющиеся при разложении третьего порядка уравнения по координате z , не удастся исключить таким образом, так как поправки к частоте второго и третьего порядка уже использованы. В

связи с этим на амплитуды и фазы колебаний накладываются соотношения следующего вида:

$$l_1 A_x^2 + l_2 A_z^2 + \Delta = 0 \quad (1.11)$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{n\pi}{2}, \quad n=1, 2, 3$$

Используя точные выражения для констант l_1 и l_2 , из уравнения можно получить соотношение амплитуд, которое необходимо соблюсти для получения периодической гало-орбиты в качестве решения уравнений движения в окрестности точки либрации. Кроме того, указанное соотношение задает минимальное значение амплитуды $A_{x\text{minimum}} = \sqrt{|\Delta/l_1|}$ для движения в окрестности коллинеарных точек либрации L_1, L_2 что соответствует примерно 200 000 км.

Полученное Ричардсоном приближение третьего порядка для периодической гало-орбиты имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} x &= a_{21}A_x^2 + a_{22}A_z^2 - A_x \cos \tau_1 + (a_{23}A_x^2 - a_{24}A_z^2) \cos 2\tau_1 + (a_{31}A_x^3 - a_{32}A_x A_z^2) \cos 3\tau_1 \\ y &= kA_x \sin \tau_1 + (b_{21}A_x^2 - b_{22}A_z^2) \sin 2\tau_1 + (b_{31}A_x^3 - b_{32}A_x A_z^2) \sin 3\tau_1 \\ z &= \delta_n A_z \cos \tau_1 + \delta_n d_{21} A_x A_z (\cos 2\tau_1 - 3) + \delta_n (d_{32} A_z A_x^2 - d_{31} A_z^3) \cos 3\tau_1 \end{aligned}$$

где $\delta_n = 2 - n$, $n=1, 3$, a_{ij}, b_{ij}, d_{ij} - константы,

$$\tau_1 = \lambda \tau + \phi$$

$$A_x > 0, A_z \geq 0.$$

1.3 Обзор миссий к коллинеарным точкам либрации

Первая работа, рассматривающая использование орбит в окрестности коллинеарных точек либрации для размещения исследовательских КА, принадлежит Роберту Фаркуа [Farquar, 1968]. В тезисах своей диссертации он изложил инженерную методику, позволяющую удерживать КА на квази гало-орбите в окрестности коллинеарных либрационных точек системы Земля-Луна с целью обеспечения связи с Землей. В работе рассматривался метод поддержания выбранной номинальной квазипериодической орбиты, а также вопросы устойчивости выбранного решения. Проект размещения спутника связи в либрационной точке L_2 системы Земля-Луна не был реализован, однако предложенные методы описания динамики полёта в рамках ограниченной задачи трёх тел были использованы при проектировании траектории КА “ISEE-3”, ставшей первой миссией, отправленной в окрестности точки либрации – в 1978 г аппарат “ISEE-3” был выведен на траекторию перелёта к точке L_1 системы Солнце-

Земля. В работах Фаркуа в рамках ограниченной задачи трёх тел была показана роль точек либрации, позволивших в данной миссии получить достаточно сложную и эволюционирующую траекторию движения аппарата в системе Солнце-Земля-Луна с минимальными затратами топлива. Во многом благодаря этой пионерской миссии использование динамики в окрестности коллинеарных точек либрации стало рассматриваться как реальная инженерная методика.

Аппарат Национального управления по воздухоплаванию и исследованию космического пространства (НАСА) для исследования комет и солнечного ветра “ISEE-3” был первым КА, выведенным на квази гало-орбиту. Он вышел на траекторию прямого перелёта к точке L_1 системы Солнце-Земля, совершил несколько оборотов на квазипериодической орбите в её окрестности, затем был переведён в окрестность точки L_2 . После выполнения нескольких гравитационных манёвров у Луны, аппарат был направлен на сближение с кометой Якобини-Циннер. Орбита в окрестности точки L_2 имела небольшой выход из плоскости эклиптики, составлявший 1.2 тыс. км. На рис. 1.3 [Farquar, 1980] представлена траектория движения КА “ISEE-3” в течение 100 суток после запуска и отражены коррекции траектории перелёта. Суммарные затраты характеристической скорости на коррекции на участке перелёта составили 57 м/с.

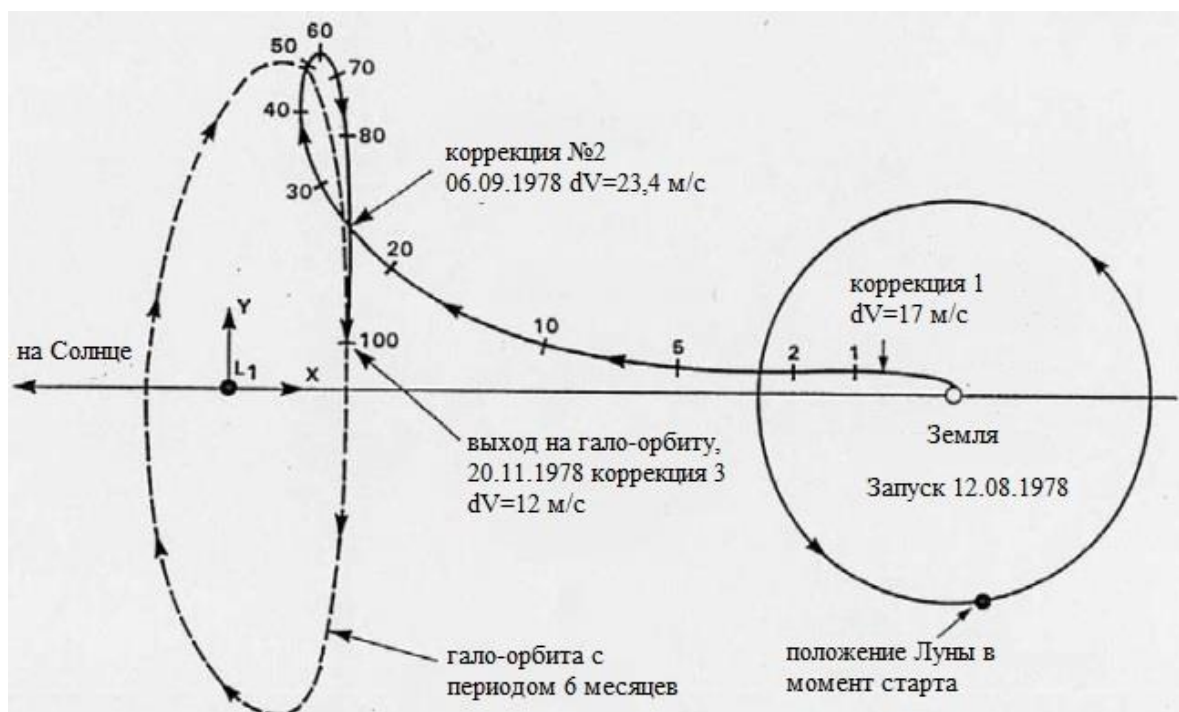


Рис. 1.3 Траектория перелёта космического аппарата “ISEE-3” на гало-орбиту в окрестности точки либрации L_1 системы Солнце-Земля

Следующая миссия, использовавшая квази гало-орбиту – космическая обсерватория SOHO, совместный проект Европейского космического агентства (ЕКА) и НАСА, направленный на изучение Солнца. Аппарат был выведен на квази гало-орбиту в окрестности точки либрации L_1 системы Солнце-Земля, схожую с орбитой аппарата “ISEE-3”, в конце 1995 г. Период орбиты составил 178 суток. Точное выведение на квази гало-орбиту привело к минимальным расходам топлива на коррекции, что позволило в несколько раз (с 2 до 8 лет) продлить научную программу. Суммарные затраты характеристической скорости на поддержание гало-орбиты составили 275 м/с.

Большой интерес для анализа представляет траектория космического аппарата “WIND”, запущенного к точке L_1 системы Солнце-Земля 1 ноября 1994 г. для изучения солнечного ветра и функционирующего по настоящее время. Первые три года аппарат находился на высокоэллиптической геоцентрической орбите и совершал гравитационные манёвры у Луны таким образом, что линия апсид его орбиты оставалась параллельной направлению от Земли на Солнце. Кроме того, в этот период был сделан один виток вокруг точки L_1 системы Солнце-Земля. Далее, в рамках расширенной миссии, КА “WIND” вышел на орбиты с большим (более 1.5 млн км) удалением от Земли в направлении оси Z и эволюционирующим наклоном относительно плоскости эклиптики. Также аппарат совершил облёт точки L_2 . Уникальная траектория КА “WIND” (см рис. 1.4-1.6 [URL: <http://pwg.gsfc.nasa.gov/wind.shtml>]) обеспечила проведение запланированных научной программой измерений в широкой окрестности околоземного пространства.

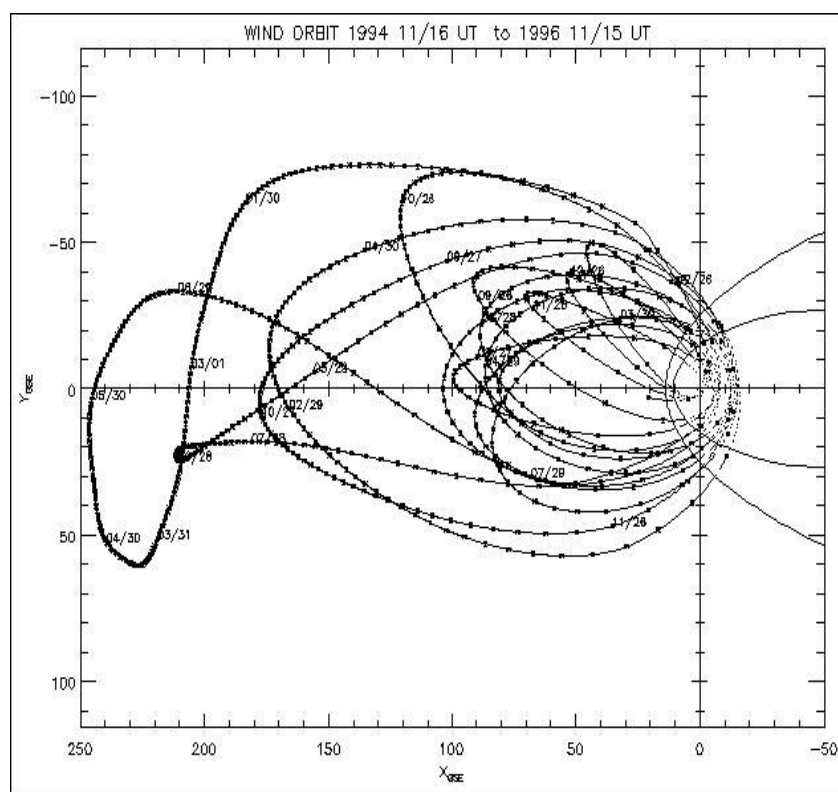


Рис. 1.4 Траектория движения КА “WIND” с 16.11.1994 по 15.11.1996 с облетом точки либрации L_1 системы Солнце-Земля

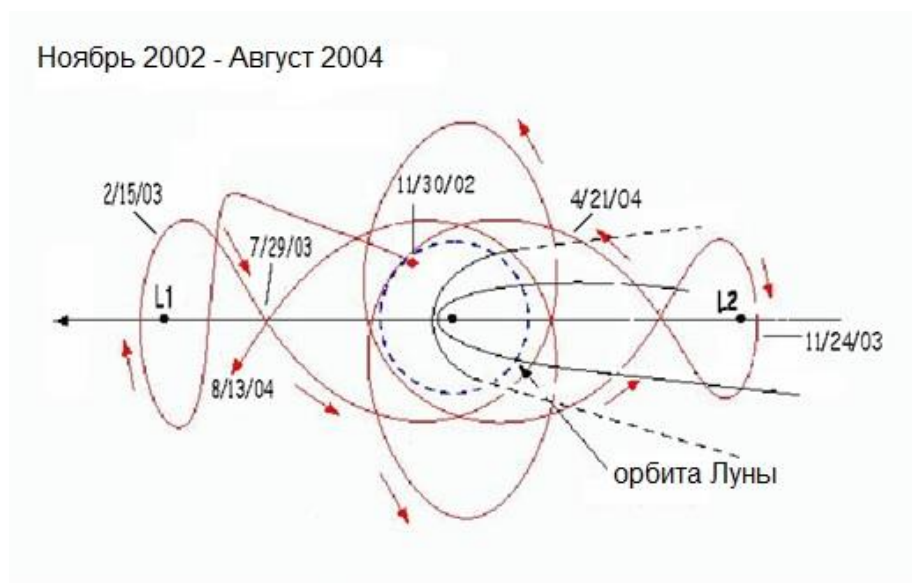


Рис 1.5 Траектория движения КА “WIND с 11.2002 по 08.2004

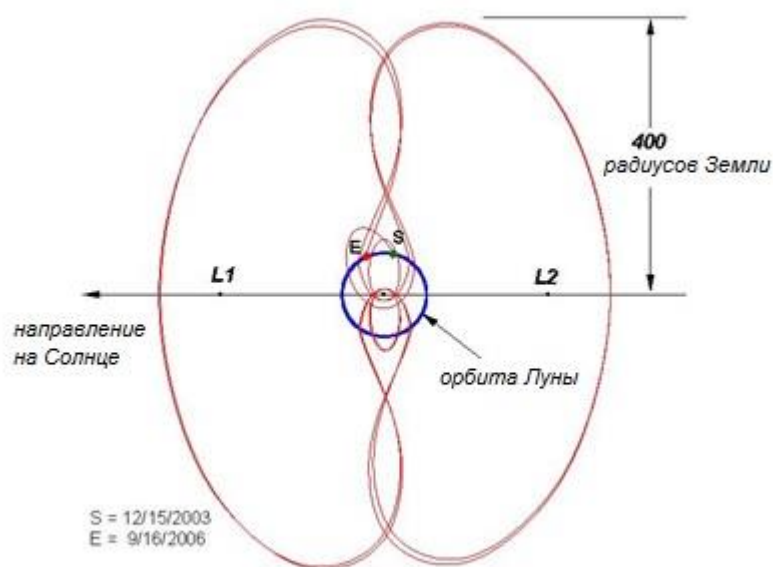


Рис 1.6 Траектория движения КА “WIND” с 12.15.2003 по 9.16.2006

Первым аппаратом, выведенным на квазипериодическую орбиту Лиссажу, стал КА НАСА “ACE”, запущенный к точке либрации L_1 системы Солнце-Земля в 1997 г. Выведение на орбиту и её поддержание потребовали коррекций; коррекции удержания необходимо было производить с периодичностью 8 недель, коррекции, изменяющие геометрию орбиты для поддержания угла КА-Солнце-Земля – раз в 3-6 месяцев. Коррекции поддержания квазипериодической орбиты рассчитывались из условия $V_x = 0$ при следующем после коррекции пересечении плоскости Солнце-Земля. Период орбиты составил 178 суток, аппарат функционирует по настоящее время. Орбита КА “ACE” представлена на рис 1.7 [URL: http://www.srl.caltech.edu/ACE/ASC/DATA/browse-html/gse_color.html].

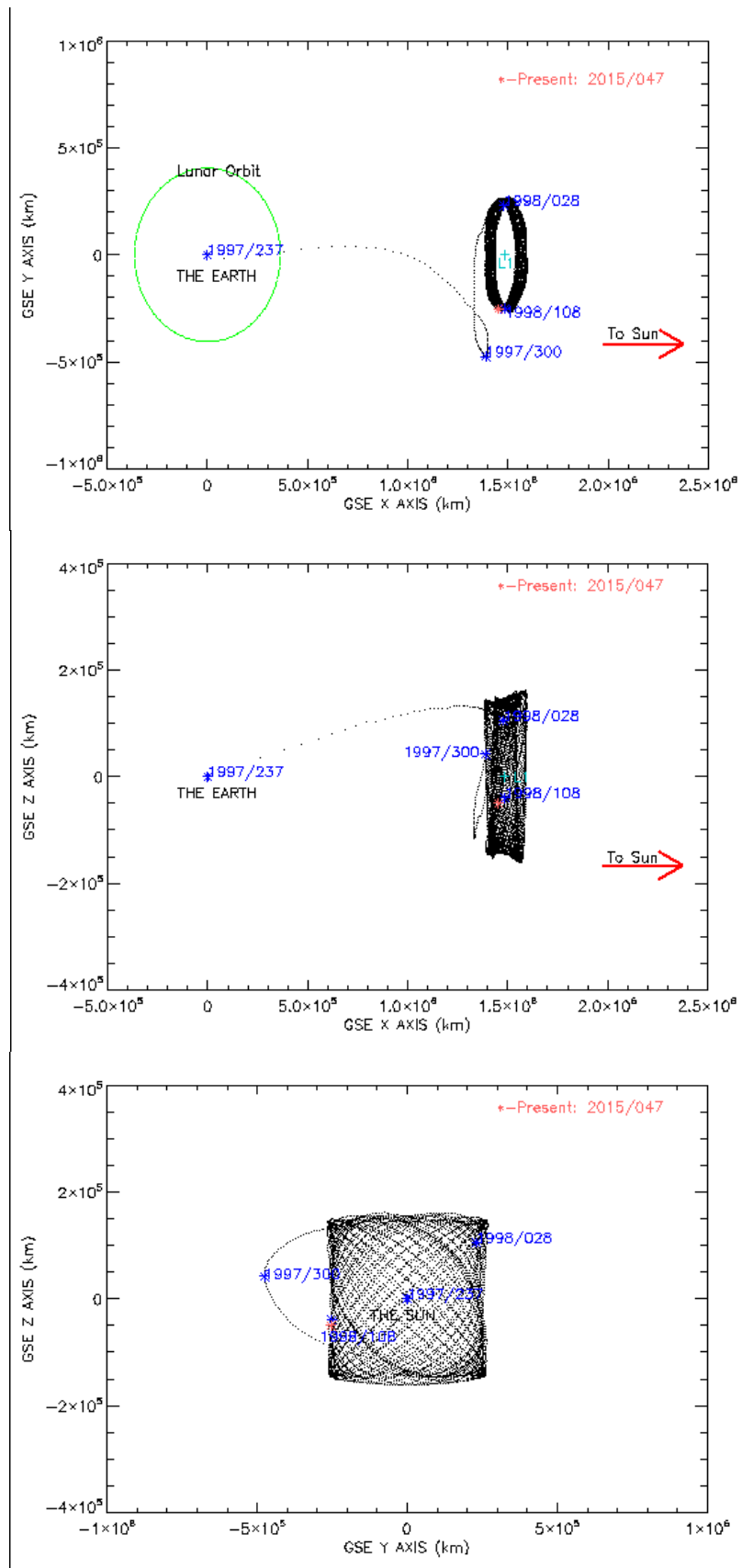


Рис 1.7 Траектория движения КА “ACE”, проекция квазипериодической орбиты на плоскости XY , XZ , YZ вращающейся СК.

В 2001 г. на орбиту Лиссажу в окрестности точки L_2 системы Солнце-Земля была выведена космическая обсерватория НАСА, предназначенная для регистрации реликтового излучения – КА “WMAP”. Перелёт был осуществлен с использованием гравитационного манёвра у Луны. Периодичность выполнения корректирующих орбиту манёвров составляла 3 месяца, диапазон углов между векторами Солнце-Земля и Земля-КА – от $0,5^\circ$ до $10,5^\circ$. В том же году к точке L_1 системы Солнце-Земля был запущен КА “Genesis”, также использовавший орбиту Лиссажу. Перелёт в окрестность точки либрации был осуществлён по одноимпульсной схеме, однако при переходе на целевую квазипериодическую орбиту потребовалось выполнение небольшого (6-36 м/с) манёвра. Периодичность выполнения манёвров поддержания орбиты КА в окрестности точки либрации также составила около 90 суток. При проектировании траектории для этой миссии впервые была применена теория динамических систем. Траектория КА “Genesis” приведена на рис. 1.8. [URL: <http://genesismission.jpl.nasa.gov/gm2/mission/halo.htm>]

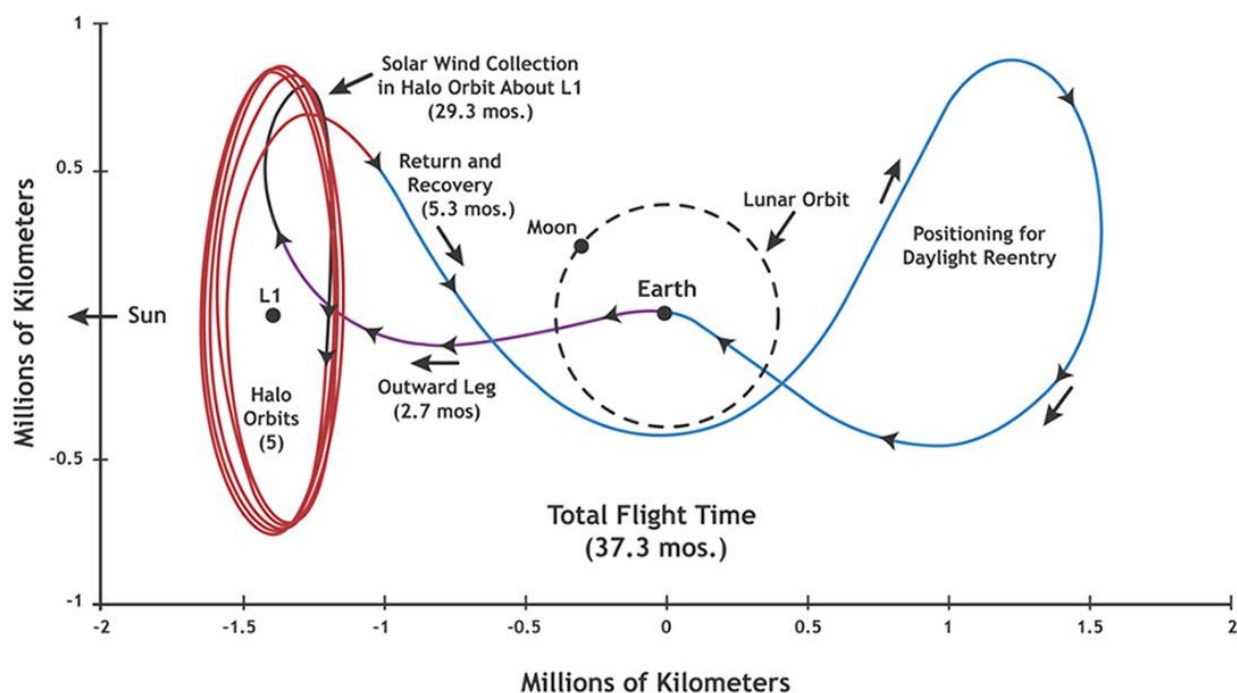


Рис. 1.8 Траектория КА “Genesis”

В 2009 г на высокоамплитудную орбиту Лиссажу в окрестности точки L_2 системы Солнце-Земля были выведены КА “Herschel” и “Planck” Европейского Космического Агентства. При переходе с траектории перелёта на орбиту КА “Planck” выполнил серию манёвров – суммарные затраты составили около 240 м/с – позволившую выйти на квазипериодическую орбиту Лиссажу малой амплитуды в окрестности точки либрации L_2 , в то время как КА “Herschel” остался на квази гало-орбите со стандартными значениями

амплитуд. Для поддержания орбит КА потребовались затраты характеристической скорости, не превосходящие 4 м/с в год. Столь эффективная стратегия поддержания орбиты обусловлена тем, что предполагалось проведение манёвров, удерживающих КА на центральном многообразии динамической системы, содержащем квазипериодические орбиты.

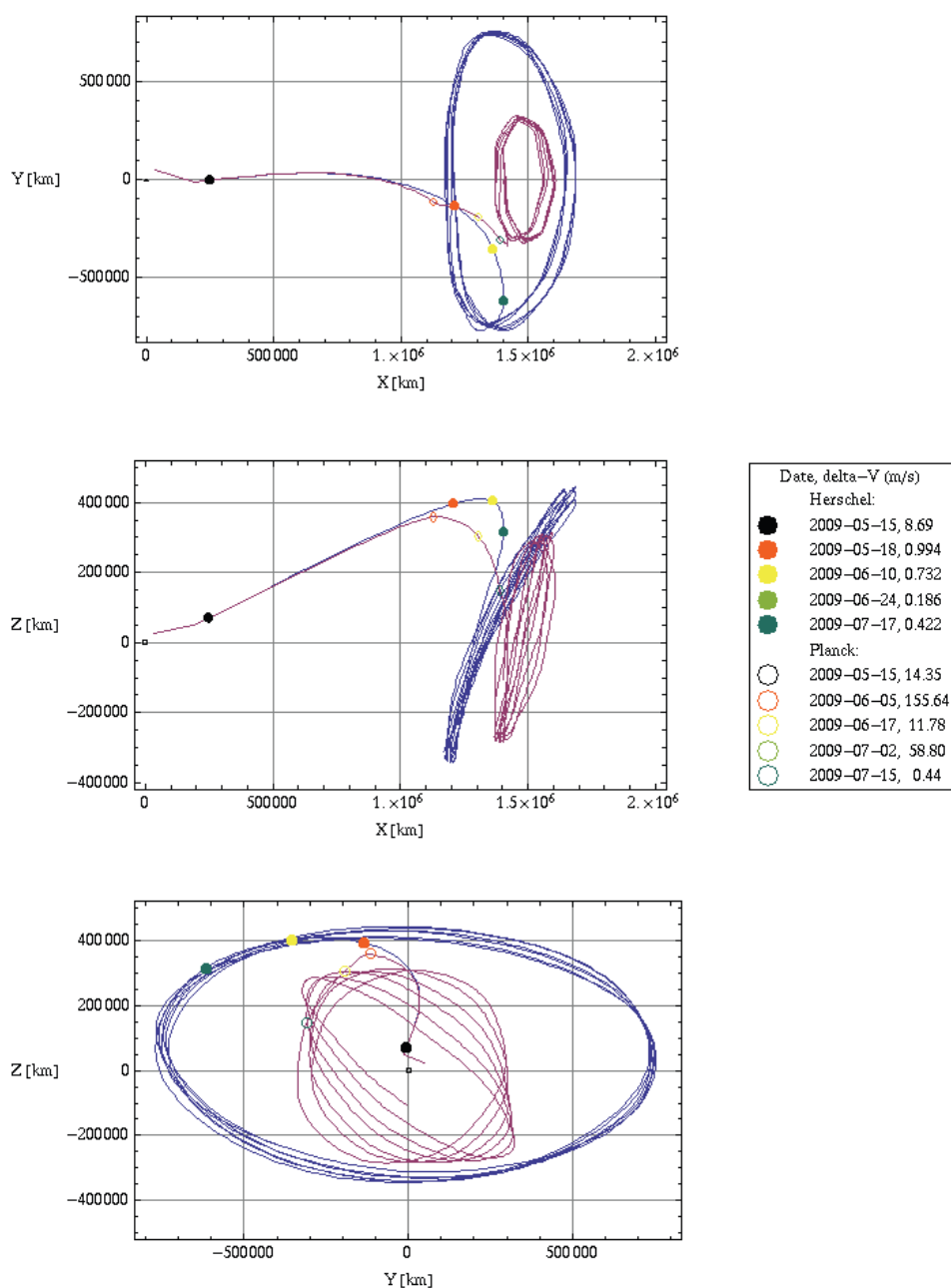


Рис. 1.9. Траектория КА “Herschel” и “Planck” [Bauske, 2009].

12 декабря 2013 г. на траекторию перелёта в окрестность точки L_2 системы Солнце-Земля был выведен КА “Gaia”. Перелёт был осуществлён по двухимпульсной схеме, для перехода на орбиту Лиссажу малой амплитуды был выполнен манёвр, модуль импульса

составил около 180 м/с. Затраты на поддержание характеристической скорости составили менее 5 м/с за первый год полёта.

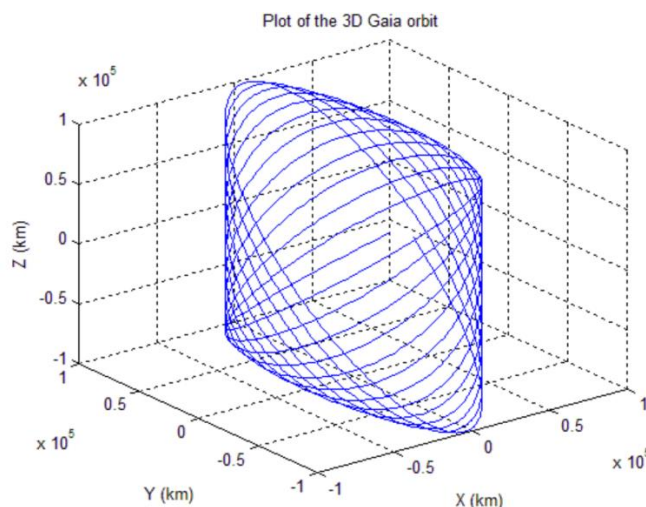


Рис. 1.10 Предполагаемая траектория КА “Gaia” – орбита Лиссажу малой амплитуды в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце-Земля

[URL: <http://www.spaceflight101.com/gaia-mission-and-orbit-design.html>]

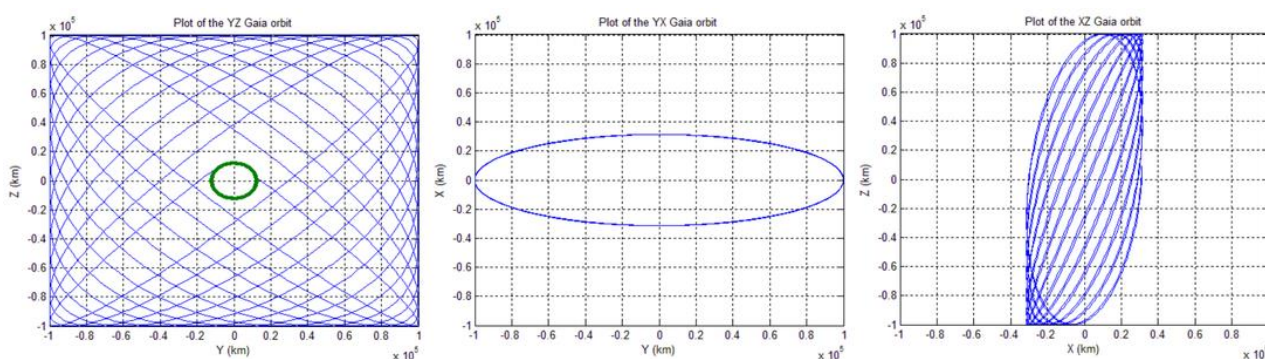


Рис. 1.11 Предполагаемая траектория КА “Gaia” – проекции орбиты Лиссажу малой амплитуды в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце-Земля на плоскости вращающейся СК с центром в точке L_2 [URL: <http://www.spaceflight101.com/gaia-mission-and-orbit-design.html>]

Удобство использования квазипериодических для размещения на них космических телескопов и других аппаратов для астрофизических исследований обусловлено следующим фактором: эти орбиты сохраняют свою пространственную ориентацию относительно Солнца и Земли. Исследуемые в данной работе квази гало-орбиты располагаются в окрестности коллинеарной точки либрации L_2 , удалённой от Земли на расстояние порядка 1.5 млн км. В этом случае пространственная конфигурация орбиты позволяет экранировать антенну от солнечного и отражённого от Земли излучения при условии поддержания постоянной ориентации аппарата. В то же время, вращаясь вместе с

Землей вокруг Солнца, аппарат за год совершает оборот на 360° , что позволяет наблюдать всю небесную сферу.

Кроме того, размещение КА на квазипериодической орбите в окрестности либрационной точки L_2 системы Солнце-Земля является энергетически выгодным: возможен безымпulseльный переход на подобную орбиту с геоцентрической отлётной траектории, суммарные затраты характеристической скорости на коррекции поддержания орбиты также невелики.

Глава 2

Построение начального приближения для множества траекторий перехода с низкой околоземной орбиты на квазипериодическую орбиту в окрестности точки L_2 системы Солнце-Земля с помощью метода изолиний

2.1. Метод изолиний функции высоты перицентра от параметров квазипериодической орбиты для прямых переходов на квазипериодические орбиты в окрестности точки L_2

Поиск одноимпульсных траекторий перелёта с низкой околоземной орбиты на квазипериодическую орбиту в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце-Земля выполняется на инвариантных многообразиях коллинеарной точки либрации с помощью варианта метода продолжения по параметру, предложенного М.Л. Лидовым и развитого в данной работе. Основная идея метода заключается в продолжении траектории из некоторой точки квазипериодической орбиты в обратном направлении по времени до момента пересечения с низкой околоземной орбитой. Заданная таким образом траектория принадлежит инвариантному многообразию, связывающему элементы центрального многообразия (периодические и квазипериодические орбиты в окрестности коллинеарной точки либрации) с областью околоземного пространства. Вариацией точки старта с квазипериодической орбиты можно добиться пересечения траекторией низкой околоземной орбиты заданного радиуса. Таким образом, метод изолиний позволяет установить функциональную связь между параметрами квазипериодической орбиты и параметрами отлетной от Земли траектории.

Движение КА рассматривается во вращающихся системах координат (СК): в системе $Ox_1x_2x_3$ с началом в барицентре системы Земля-Луна O и в системе $O'\xi_1\xi_2\xi_3$ с началом O' в точке либрации L_2 (рис. 2.1). При этом: $x_1 = \xi_1 - |OO'|$, $x_2 = \xi_2$, $x_3 = \xi_3$. Положение точки L_2 определяется следующим образом: пусть $\mathbf{r}_{BS}(t) = |\mathbf{r}_{BS}|$ – расстояние от Солнца до барицентра системы Земля – Луна (вектор состояния барицентра Земля – Луна в геоцентрической СК $\mathbf{x}_{BE} = \{\mathbf{r}_{BE}, \mathbf{v}_{BE}\}$ и гелиоцентрической СК $\mathbf{x}_{BS} = \{\mathbf{r}_{BS}, \mathbf{v}_{BS}\}$ вычисляется

по формулам: $\mathbf{x}_{BE} = \frac{1}{\frac{\mu_E}{\mu_M} + 1} \mathbf{x}_{ME}$, $\mathbf{x}_{BS} = \mathbf{x}_{ES} + \mathbf{x}_{BE}$), а μ_S, μ_E, μ_M – гравитационные параметры

Солнца, Земли и Луны. Тогда расстояние $\mathbf{r}_B(t)$ от барицентра системы Земля – Луна до

точки L_2 вычисляется по формуле: $\mathbf{p}_B(t) = \alpha \mathbf{p}_{BS}(t)$, где α находится из решения уравнения

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{\mu(1+\alpha^2)}{3-2\mu+(3-\mu)\alpha+\alpha^2}}, \text{ где } \mu = \frac{\mu_E + \mu_M}{\mu_S + \mu_E + \mu_M}. \text{ Обозначим } |\mathbf{p}_B| \text{ как } r_L, |\mathbf{p}_{BS}| \text{ как } r_{L1}.$$

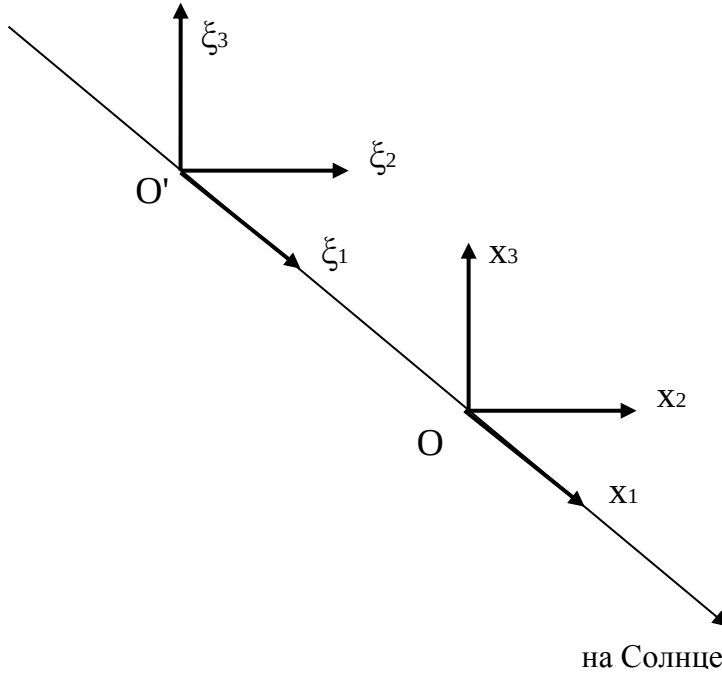


Рис. 2.1 Системы координат $Ox_1x_2x_3$ и $O'\xi_1\xi_2\xi_3$

Зависимость координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 от времени определяется решением линеаризованной в окрестности точки L_2 системы уравнений движения (см. раздел 1.1):

$$\begin{aligned} \xi_1 &= A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C e^{\lambda t} + D e^{-\lambda t}, \\ \xi_2 &= -k_2 A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + k_1 (C e^{\lambda t} - D e^{-\lambda t}), \\ \xi_3 &= B \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где значения $\omega_1, \omega_2, \lambda, k_1, k_2$ можно вычислить в явном виде:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= n_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{9B_L^2 - 8B_L} - B_L + 2 \right)} \approx 0.035384 \frac{\text{рад}}{\text{сутки}}, \\ \omega_2 &= n_1 \cdot \sqrt{B_L} \approx 0.034148 \frac{\text{рад}}{\text{сутки}}, \\ \lambda &= n_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{9B_L^2 - 8B_L} + B_L - 2 \right)} \approx 0.042734 \frac{\text{рад}}{\text{сутки}}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$k_1 = \frac{1}{2(\lambda/n_1)} \left[\left(\frac{\lambda}{n_1} \right)^2 - 2B_L - 1 \right] \approx -0.54525,$$

$$k_2 = \frac{1}{2(\omega_1/n_1)} \left[\left(\frac{\omega_1}{n_1} \right)^2 + 2B_L + 1 \right] \approx 3.1873,$$

$$\mu' = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu},$$

$$B_L = \left(\frac{1-\mu'}{r_{L1}^3} + \frac{\mu'}{r_L^3} \right) a_1^3,$$

- | | | |
|------------------------------------|---|--|
| μ_1, μ | – | массы Солнца и барицентра системы Земля-Луна, |
| a_1 | – | астрономическая единица, |
| r_{L1}, r_L | – | расстояния от точки L_2 до Солнца и барицентра системы Земля-Луна, |
| n_1 | – | средняя угловая скорость орбитального движения Земли, |
| $A, B, C, D, \varphi_1, \varphi_2$ | – | постоянные интегрирования. |

Определим $x_1^* = -\theta \cdot r_L$. Выбором θ в интервале $\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right]$ можно удовлетворить следующим условиям. Если траектория начинается в окрестности Земли и является асимптотической к условно-периодической орбите, расположенной в достаточно малой окрестности L_2 , то такая траектория обязательно пересечёт плоскость $x_1 = x_1^*$. При этом в главном приближении характеристики траектории для $|x_1| < |x_1^*|$ должны удовлетворительно описываться решениями задачи двух тел, а при $|x_1| > |x_1^*|$ линейным приближением (2.1). Асимптотичность траектории (асимптотическое приближение к условно-периодической орбите) в рамках такого приближения определяется условием $C = 0$.

Пусть начало отсчёта выбрано так, что при $t = t_0$ выполняется равенство: $x_1 = x_1^*$. Тогда из первого уравнения (2.1) находим

$$D = x_1^* + r_L - A \cos \varphi_1 \quad (2.3)$$

Тем самым при $t = 0$ координаты x_1, x_2, x_3 и скорости $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}$ оказываются однозначными функциями четырех параметров: $A, B, \varphi_1, \varphi_2$.

Переходя к невращающейся геоцентрической СК, определим зависимости элементов орбиты – скорости в точке перицентра v_π , аргумента перицентра ω , долготы восходящего узла Ω , наклона i , радиуса перицентра r_π и периода τ от этих параметров.

Естественно выделить траектории одноимпульсного перелёта условием на расстояние перицентра

$$r_\pi = R_3 + h = r_\pi^*,$$

где R_3 – радиус Земли, r_π^* – заданная высота перицентра промежуточной орбиты ИСЗ.

Тем самым множество орбит перелёта определяется указанными зависимостями $v_\pi, \omega, \Omega, i, r_\pi$ и τ от A, B, φ_1 и φ_2 при условии, что расстояние перицентра r_π равно заданной величине.

В работе [Лидов, 1987] для построения этих зависимостей используется метод изолиний. При фиксированных A и B в плоскости φ_1, φ_2 строится изолиния: $r_\pi(\varphi_1, \varphi_2) = r_\pi^*$.

Рассмотрим алгоритм вычисления r_π по заданным фазам φ_1 и φ_2 . Для этого будем рассматривать его как функцию параметров квазипериодической орбиты, т.е. $r_\pi = f(\varphi_1, \varphi_2, \theta_A, \theta_B)$. Сначала согласно выражениям (2.2) вычисляются значения параметров системы Солнце-Земля и констант $\mu', n_1, r_L, r_{L_1}, \omega_1, \omega_2, \lambda, k_1, k_2, B_L$. Затем вычисляется вектор состояния КА в инерциальной СК, полученной фиксацией осей вращающейся СК на фиксированный момент времени t в зависимости от параметров: A, B, φ_1 и φ_2 ($A = \theta_A \cdot r_L, B = \theta_B \cdot r_L$).

Пусть,

$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3$ – вектор состояния КА в момент времени $t=0$ во вращающейся СК с центром в L_2 ,

$x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ – координаты и компоненты скорости КА в момент времени $t=0$ в невращающейся геоцентрической эклиптической СК $Ox_1x_2x_3$, ось Ox_1 которой направлена на Солнце в момент времени t_0 ,

$x_1^* = -\theta \cdot r_L$ – параметр перехода из сферы действия Земли в окрестность L_2 , $\theta \in \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right]$.

Координаты и компоненты вектора скорости КА вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
 D &= r_L + x_1^* - A \cos \varphi_1 \\
 \xi_1 &= r_L + x_1^*, & \dot{\xi}_1 &= -\omega_1 A \sin \varphi_1 - \lambda D, \\
 \xi_2 &= -k_2 A \sin \varphi_1 - k_1 D, & \dot{\xi}_2 &= -k_2 \omega_1 A \cos \varphi_1 + k_1 \lambda D \\
 \xi_3 &= B \cos \varphi_2, & \dot{\xi}_3 &= -\omega_2 B \sin \varphi_2.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \xi_1 - r_L, & \dot{x}_1 &= \dot{\xi}_1 - n_1 x_2, \\
 x_2 &= \xi_2, & \dot{x}_2 &= \dot{\xi}_2 + n_1 x_1, \\
 x_3 &= \xi_3, & \dot{x}_3 &= \dot{\xi}_3.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Далее по вектору $(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ вычисляются элементы орбиты КА, в том числе расстояние перицентра r_π .

Перейдем к описанию алгоритма построения изолиний функции высоты перицентра от параметров квазипериодической орбиты.

Входной информацией алгоритма являются:

- параметры квазипериодической орбиты $\theta_A = \frac{A}{r_L}$, $\theta_B = \frac{B}{r_L}$
- радиус перицентра низкой околоземной орбиты $r_\pi = R_3 + h = r_\pi^*$
- шаг по значениям фаз $step(\varphi_1), step(\varphi_2)$

Выходной информацией алгоритма являются:

- значения φ_1, φ_2 , являющиеся точками построенных изолиний, соответствующих заданным входным параметрам;
- значения наклона построенной траектории перелёта для каждой точки изолинии.

Алгоритм построения изолинии функции высоты перицентра (для некоторого его фиксированного значения) от параметров квазипериодической орбиты в фазовой плоскости φ_1, φ_2 состоит из двух частей: поиска начальной точки изолинии и расчёта изолинии по найденной начальной точке.

Поиск начальной точки изолинии выполняется сканированием в интервалах по φ_1 от 0 до 360° и по φ_2 от -180° до 180° . Экспериментально было установлено, что шаг по φ_2 следует выбирать не менее 45° , а по φ_1 — не менее 1° . Внешний цикл алгоритма поиска

начальной точки выполняет сканирование по значениям φ_2 в указанных пределах, внутренний – сканирование по значениям φ_1 . Для каждого значения φ_2 вычисляются значения $f(\varphi_1, \varphi_2, \theta_A, \theta_B)$ согласно уравнениям 2.4, 2.5 для значений φ_1 из указанного выше интервала. Если выполняется условие:

$$\left(f(\varphi_1 - 1^\circ, \varphi_2, \theta_A, \theta_B) - r_\pi^*\right) \cdot \left(f(\varphi_1, \varphi_2, \theta_A, \theta_B) - r_\pi^*\right) \leq 0, \quad (2.6)$$

искомое значение φ_1^* лежит в интервале от $\varphi_1 - 1^\circ$ до φ_1 . Для нахождения φ_1^* используется функция, реализующая метод бисекции: выполняется итерационная процедура, на каждом её шаге интервал поиска сокращается в два раза. Обозначим φ_b и φ_e начало и конец интервала поиска. При выполнении условия (2.6) начало интервала поиска φ_b устанавливается равным $\varphi_1 - 1^\circ$, а конец — φ_1 . На каждом шаге вычисляется

$\varphi_m = \frac{\varphi_b + \varphi_e}{2}$ и значение функции в этой точке:

$$r_{\pi, m} = f(\varphi_m, \varphi_2, \theta_A, \theta_B). \quad (2.7)$$

Обозначим:

$$r_{\pi, b} = f(\varphi_b, \varphi_2, \theta_A, \theta_B). \quad (2.8)$$

Если $(r_{\pi, b} - r_\pi^*) \cdot (r_{\pi, m} - r_\pi^*) \leq 0$, искомое значение φ^* принадлежит интервалу $[\varphi_b, \varphi_m]$, иначе интервалу $[\varphi_m, \varphi_e]$. Таким образом, границы интервала φ_b и φ_e устанавливаются по следующему алгоритму:

$$\varphi_b^{\text{new}} = \begin{cases} \varphi_b, & \text{если } (r_{\pi, b} - r_\pi^*)(r_{\pi, m} - r_\pi^*) \leq 0, \\ \varphi_m, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$\varphi_e^{\text{new}} = \begin{cases} \varphi_m, & \text{если } (r_{\pi, b} - r_\pi^*)(r_{\pi, m} - r_\pi^*) \leq 0, \\ \varphi_e, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Итерационный процесс завершается, если $\varphi_e - \varphi_b < \varepsilon_\varphi$. Экспериментально установлено, что ε_φ целесообразно положить равным $\frac{180}{\pi} 10^{-6}$.

Основным звеном алгоритма расчёта изолинии является алгоритм расчёта следующей точки при известной текущей. Основной принцип алгоритма состоит в том, что если известна точка (φ_1, φ_2) , принадлежащая изолинии, то ищется точка пересечения изолинии с прямой, параллельной оси φ_1 на плоскости φ_1, φ_2 и проходящей через точку

начала поиска $(\varphi_1 + s, \varphi_2 + s)$, либо точка пересечения изолинии с прямой, параллельной оси φ_2 и также проходящей через точку начала поиска (рис. 2.2).

Входной информацией этого алгоритма является точка начала поиска $(\varphi_{1,i}, \varphi_{2,i})$ и шаг поиска h_φ . Случай поиска второй точки изолинии от случая поиска третьей и последующих точек отличается выбором параметра s .

$$s = \begin{cases} h_\varphi, & \text{если } i = 1; \\ h_\varphi \frac{h_g}{\sqrt{(\varphi_{1i} - \varphi_{1i-1})^2 + (\varphi_{2i} - \varphi_{2i-1})^2}}, & \text{если } i > 1, \end{cases}$$

где $(\varphi_{1,i}, \varphi_{2,i})$, $(\varphi_{1,i-1}, \varphi_{2,i-1})$ – точки, принадлежащие изолинии, а h_g – угол, величина которого здесь выбрана равной одному градусу.

С использованием параметра s и последней известной точки изолинии $(\varphi_{1,i}, \varphi_{2,i})$ устанавливается точка начала поиска $(\varphi_{1b}, \varphi_{2b}) = (\varphi_1 + s, \varphi_2 + s)$ и ищется пересечение изолинии с отрезком на плоскости φ_1, φ_2 , соединяющим точки $(\varphi_{1b} - j \cdot h_\varphi, \varphi_{2b})$ и $(\varphi_{1b} + j \cdot h_\varphi, \varphi_{2b})$ при $j = 1, 2, \dots, N$. Этот отрезок проходит через точку начала поиска, параллелен оси φ_1 , а длина его увеличивается с увеличением индекса j . Для этого ищется такое значение $j = 1, 2, \dots, N$, при котором выполняется условие:

$$\left(f(\varphi_{1b} - j \cdot h_\varphi, \varphi_{2b}, \theta_A, \theta_B) - r_\pi^* \right) \cdot \left(f(\varphi_{1b} + j \cdot h_\varphi, \varphi_{2b}, \theta_A, \theta_B) - r_\pi^* \right) \leq 0. \quad (2.9)$$

Если значение j найдено, происходит поиск такого значения φ_1^* , чтобы точка $(\varphi_1^*, \varphi_{2b})$ принадлежала изолинии. Для этого используется описанный выше алгоритм, реализующий метод бисекции.

Если значение индекса j , при котором выполняется условие (2.9), не найдено, ищется точка пересечения изолинии с отрезком, который проходит через точку начала поиска и параллелен оси φ_2 . Этот отрезок соединяет точки $(\varphi_{1b}, \varphi_{2b} - j \cdot h_\varphi)$ и $(\varphi_{1b}, \varphi_{2b} + j \cdot h_\varphi)$. При поиске пересечения ищется значение индекса $j = 1, 2, \dots, N$, для которого выполняется условие:

$$\left(f(\varphi_{1b}, \varphi_{2b} - j \cdot h_\varphi, \theta_A, \theta_B) - r_\pi^* \right) \cdot \left(f(\varphi_{1b}, \varphi_{2b} + j \cdot h_\varphi, \theta_A, \theta_B) - r_\pi^* \right) \leq 0. \quad (2.10)$$

Если найдено значение j , при котором выполняется условие (2.10), происходит поиск методом бисекции значения φ_2^* , при котором точка $(\varphi_{1b}, \varphi_2^*)$ принадлежит изолинии. Если значение j , при котором выполняется условие (2.10), не найдено, работа алгоритма завершается с отрицательным кодом ответа: точка изолинии не найдена. В результате вычислительных экспериментов установлено, что значение N целесообразно принять равным 4.

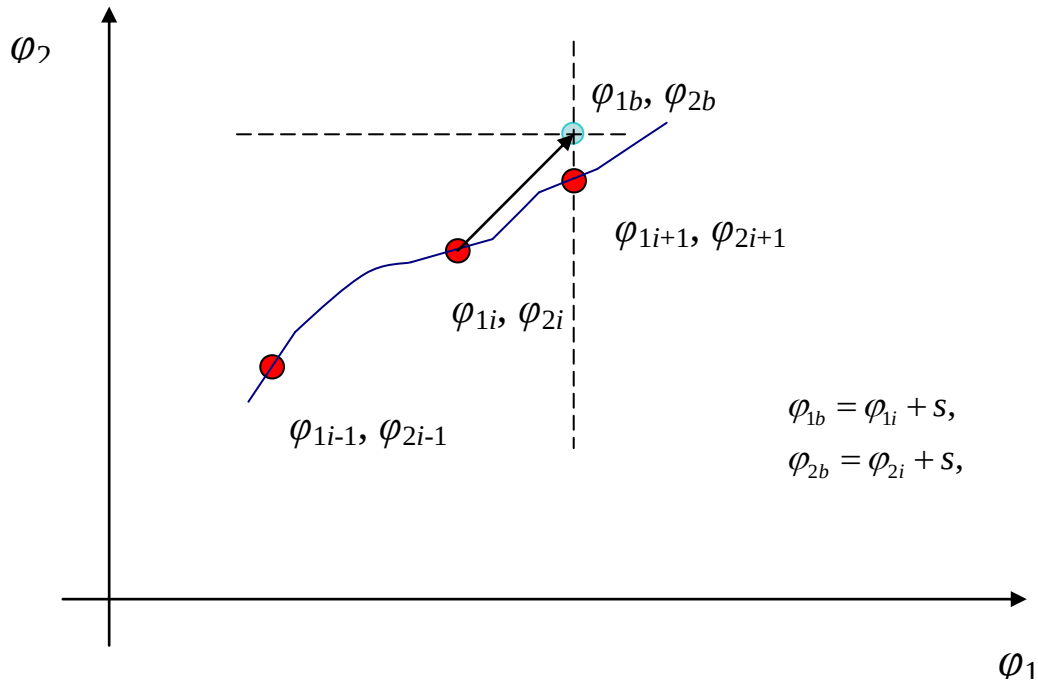


Рис. 2.2 Продолжение изолинии от текущей точки к следующей

Процесс построения изолинии завершается, если выполнено условие замыкания изолинии

$$\sqrt{(\varphi_{1,i} - \varphi_{1,1})^2 + (\varphi_{2,i} - \varphi_{2,1})^2} < \varepsilon_{\varphi}^{\text{stop}} \quad (2.11)$$

или получен отрицательный код ответа от алгоритма поиска следующей точки. В результате вычислительных экспериментов установлено, что значение параметра $\varepsilon_{\varphi}^{\text{stop}}$ целесообразно положить равным 0.5° .

Результатом работы данного алгоритма является множество точек изолиний в фазовом пространстве (φ_1, φ_2) , соответствующее множеству траекторий одноимпульсного перехода с геоцентрической орбиты выведения заданного радиуса на квазипериодическую орбиту заданной геометрии. В таблице 2.1 представлен результат работы вышеописанного

алгоритма. Здесь и далее изложение последовательных этапов алгоритма построения траекторий одноимпульсного перелёта на квазипериодическую орбиту заданной геометрии сопровождается представленными в таблицах результатами тестового расчёта для перелёта на орбиту с амплитудами $\theta_A = 0.20$; $\theta_B = 0.85$.

Таблица 2.1 Точки построенных изолиний (представлены частично, полученная изолиния содержит 26649 точек для выбранных значений шагов по φ_1 и j_2)

$\theta = \frac{17}{24}$	θ_A	θ_B	$\varphi_1(0; 2\pi)$	$\varphi_2(-\pi; \pi)$	I, град
0.708333333	0.2	0.85	2.583225245	-0.833394718	96.826
0.708333333	0.2	0.85	2.600678537	-0.834672503	94.603
0.708333333	0.2	0.85	2.618085243	-0.835305055	92.175
0.708333333	0.2	0.85	2.635527022	-0.835173489	89.518
0.708333333	0.2	0.85	2.639020061	-0.83504184	88.958
0.708333333	0.2	0.85	2.649817449	-0.834384511	87.163
0.708333333	0.2	0.85	2.660482049	-0.833323944	85.291
0.708333333	0.2	0.85	2.672291654	-0.831596778	83.098
0.708333333	0.2	0.85	2.684552891	-0.829071086	80.673
0.708333333	0.2	0.85	2.697029889	-0.825549813	78.036
0.708333333	0.2	0.85	2.709420593	-0.820809297	75.227
0.708333333	0.2	0.85	2.721366268	-0.81457275	72.311
0.708333333	0.2	0.85	2.732376097	-0.806495358	69.414
0.708333333	0.2	0.85	2.741692502	-0.796171191	66.776
0.708333333	0.2	0.85	2.748131873	-0.783213659	64.837
0.708333333	0.2	0.85	2.750020522	-0.767583998	64.248
0.708333333	0.2	0.85	2.745837233	-0.75025675	65.54
0.708333333	0.2	0.85	2.735799684	-0.733290905	68.466
0.708333333	0.2	0.85	2.721929853	-0.718269665	72.168
0.708333333	0.2	0.85	2.706125374	-0.705446658	75.994
0.708333333	0.2	0.85	2.689391675	-0.69445011	79.672
0.708333333	0.2	0.85	2.672188023	-0.684865075	83.117
0.708333333	0.2	0.85	2.654733679	-0.676370424	86.312
0.708333333	0.2	0.85	2.637152069	-0.668732772	89.258
0.708333333	0.2	0.85	2.619514683	-0.661778687	91.965

Полученные изолинии функции высоты перицентра от параметров квазипериодической орбиты можно визуализировать, построив изолинии на фазовой плоскости φ_1, φ_2 . Примеры изолиний, построенных для высоты перицентра $h = 200$ км, показаны на рисунках 2.3 – 2.6. Эти данные приведены в качестве иллюстрации семейств найденных траекторий перелёта. На рис. 2.3 представлены изолинии, построенные для $\theta_A = 0.171$ и $\theta_B = 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.10$. На рис. 2.4 представлены изолинии, построенные для $\theta_A = 0.175$ и $\theta_B = 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.10$. На рис. 2.5 изображены изолинии, построенные для $\theta_A = 0.18$, $\theta_B = 0.07, 0.08, 0.09$, и 0.10 . На рис. 2.6 показаны изолинии, построенные для $\theta_A = 0.18, 0.19, 0.20$, $\theta_B = 0.10$. На всех графиках по оси абсцисс отложено значение фазы φ_1 , по оси ординат – фазы φ_2 , оба значения приводятся в градусах.

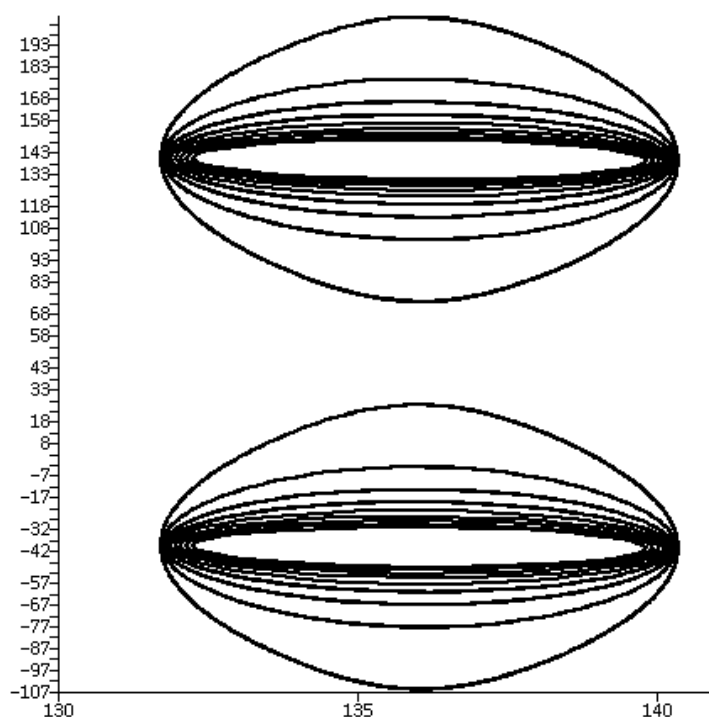


Рис. 2.3 Изолинии, построенные для $\theta_A = 0.171$ и $\theta_B = 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.10$; $h = 200$ км

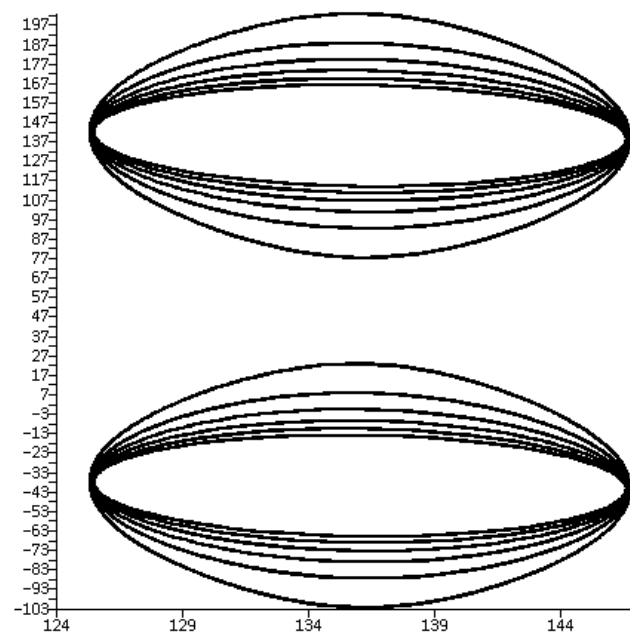


Рис. 2.4 Изолинии, построенные для $\theta_A = 0.175$ и $\theta_B = 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.10$;
 $h = 200$ км

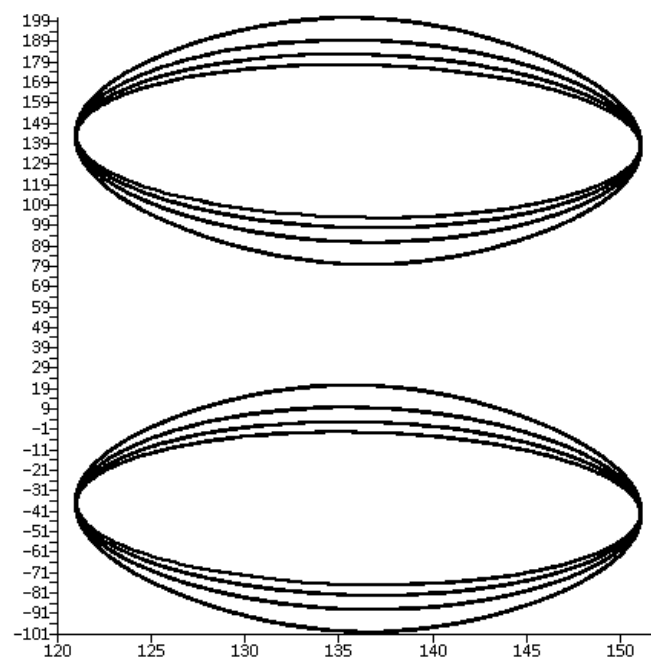


Рис. 2.5 Изолинии, построенные для $\theta_A = 0.18$, $\theta_B = 0.07, 0.08, 0.09, 0.10$;
 $h = 200$ км

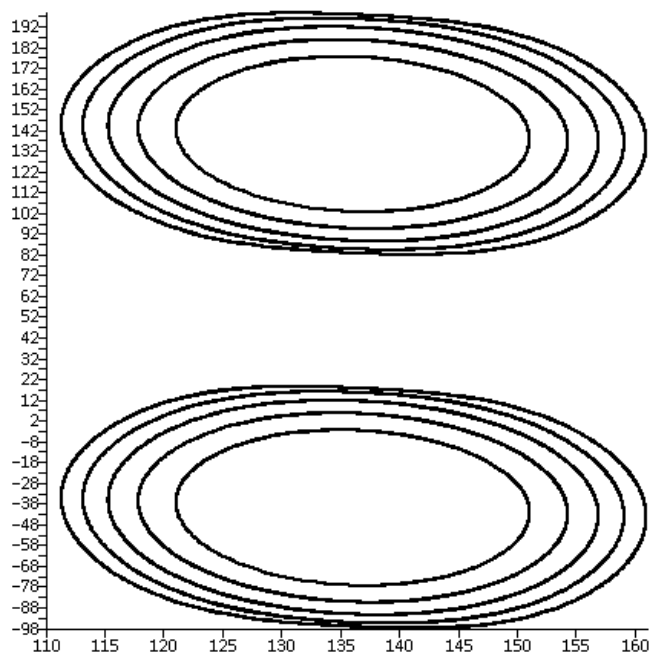


Рис. 2.6 Изолинии, построенные для $\theta_A = 0.18, 0.19, 0.20$, $\theta_B = 0.10$; $h = 200$ км

На рисунке 2.7 представлены изолинии, использованные для расчёта множеств траекторий КА «Спектр-РГ» и «Спектр-М». Соотношение амплитуд колебаний θ_A и θ_B для получения квази гало-орбит КА «Спектр-РГ» было подобрано с учётом связи (1.11). Красным цветом изображены изолинии, соответствующие соотношениям амплитуд $\theta_A = 0.18, \theta_B = 0.1524$, $\theta_A = 0.19, \theta_B = 0.1538$, $\theta_A = 0.20, \theta_B = 0.1552$, использованным для построения квазипериодических орбит для КА «Спектр-РГ». Синим цветом – изолинии, соответствующие значениям $\theta_A = 0.20, \theta_B = 0.850$ – это соотношение было использовано для построения квазипериодических орбит с большим выходом из плоскости эклиптики, соответствующих требованиям заказчиков научного эксперимента проекта «Миллиметрон». Высота перицентра низкой околоземной орбиты принята равной 300 км, значения фаз φ_1, φ_2 на графике приведены в радианах.

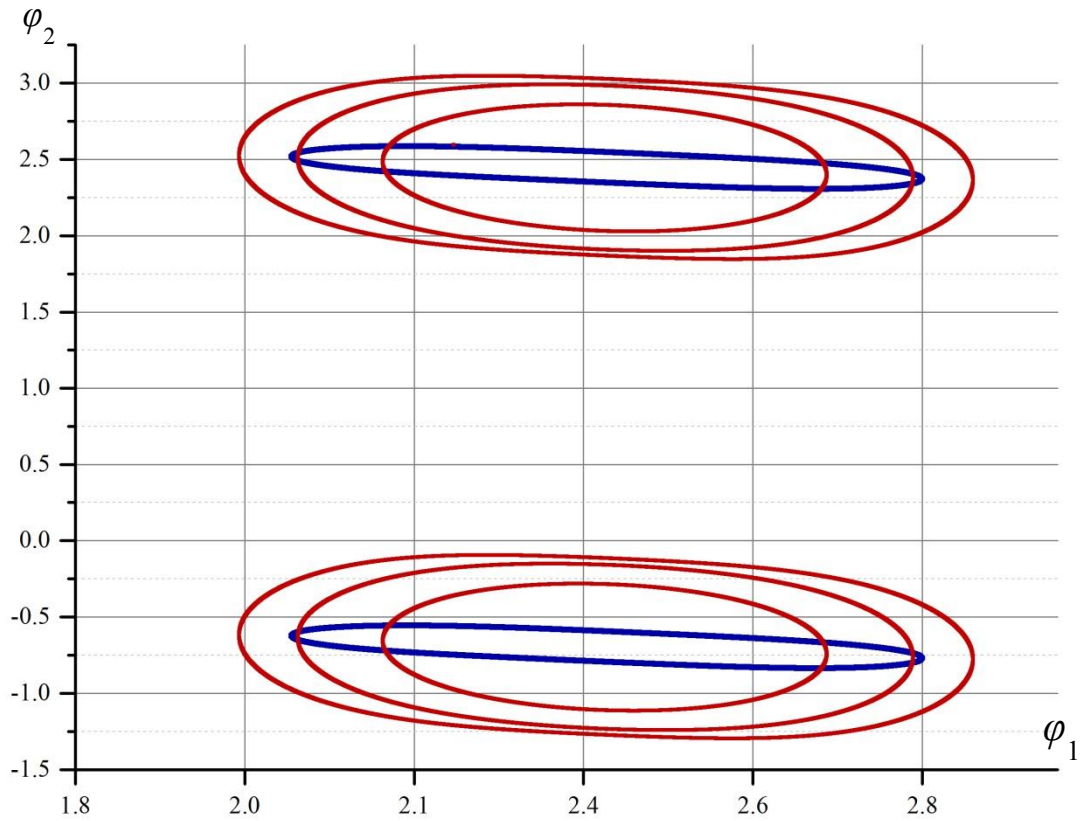


Рис. 2.7 Изолинии, построенные для $\theta_A = 0.18$, $\theta_B = 0.1524$, $\theta_A = 0.19$, $\theta_B = 0.1538$, $\theta_A = 0.20$, $\theta_B = 0.1552$, (красный цвет) и $\theta_A = 0.20$, $\theta_B = 0.85$ (синий цвет); $h = 300$ км

Из представленных графиков можно сделать следующие выводы: в отсутствие ограничений, наложенных на траекторию перелёта, предложенный алгоритм позволяет построить траекторию перелёта из некоторого замкнутого множества точек квазипериодической орбиты. Как видно из рис 2.3 – 2.7, для каждого сочетания значений амплитуд существует два замкнутых множества точек перехода на квазипериодическую орбиту – эти множества отвечают северным и южным множествам квазипериодических орбит, в случае достаточной величины амплитуд колебаний – северным или южным квази гало-орбитам в окрестности гало-орбит соответствующего типа. Гало-орбиты северного типа соответствуют значениям $j_2 < 0$ - переход на периодическое решение выполняется в точке решения, где значение $z < 0$, гало-орбиты южного типа – значениям $j_2 > 0$. В предельном случае периодической гало-орбиты частоты колебаний φ_1 и φ_2 связаны линейным соотношением (для аппроксимации Ричардсона $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{n\pi}{2}$, $n=1,2,3$) и отображение множества траекторий перехода на квазипериодическую орбиту на фазовой плоскости вырождается в линию.

2.2. Метод изолиний функции высоты перицентра от параметров квазипериодической орбиты для траекторий перехода на квазипериодические орбиты в окрестности точки L_2 с использованием гравитационного манёвра у Луны

Метод изолиний функции высоты перицентра от параметров квазипериодической орбиты был распространён на класс одноимпульсных траекторий перелёта на квазипериодические орбиты с использованием гравитационного манёвра у Луны. Использование гравитационного манёвра позволяет получить импульс, необходимый для перехода на более компактные орбиты в окрестности коллинеарной точки либрации. Однако гравитационный манёвр у Луны накладывает жесткие временные ограничения на траектории и снижает надёжность миссии, поэтому для практических задач было решено использовать траектории прямого перелёта в окрестность точки либрации.

Рассмотрим методику и вычислительный алгоритм построения начального приближения для траектории одноимпульсного перелёта с низкой околоземной орбиты на заданную квазипериодическую орбиту вокруг точки L_2 с использованием гравитационного манёвра у Луны. Алгоритм применим как в случае, когда КА после перехода на перелётную траекторию сразу направляется к Луне, так и в случае, когда КА перед перелётом к Луне совершает виток вокруг Земли по сильно вытянутой орбите.

Траектория перелёта разбивается на три участка:

- от Земли до входа в сферу действия Луны,
- полёт в сфере действия Луны,
- полёт после выхода из сферы действия Луны до входа в окрестность L_2 .

Как и в методике, используемой для поиска прямых одноимпульсных траекторий перелёта, участки траектории проходятся в обратном направлении. Движение от точки на квазипериодической орбите до входа в сферу действия Луны рассматривается таким же образом, как и при прямом перелёте – при пересечении границы $x_1^* = -\theta \cdot r_L$ выполняется переход к геоцентрическому вектору, по которому с помощью численного интегрирования определяется момент входа в сферу действия Луны. Затем выполняется переход в селеноцентрическую СК и полёт в сфере действия Луны до выхода из неё. Далее вектор состояния преобразуется в геоцентрическую СК. Численный расчёт вектора состояния КА целесообразно выполнять до достижения расстояния 50 тыс. км до центра Земли. Далее удобно вычислять оскулирующие элементы орбиты и находить расстояние перицентра.

Основными параметрами гравитационного манёвра у Луны являются dV_{GAM} – модуль импульса, сообщаемого КА в результате гравитационного манёвра, и pV_{GAM} – проекция импульса гравитационного манёвра на направление скорости КА. Если $pV_{GAM} > 0$, импульс гравитационного манёвра направлен на разгон КА, иначе — на торможение.

Параметры dV_{GAM} и pV_{GAM} вычисляются по следующим формулам :

$$dV_{GAM} = \sqrt{(V_{xSC_M}(t_{outM}) - V_{xSC_M}(t_{inM}))^2 + (V_{ySC_M}(t_{outM}) - V_{ySC_M}(t_{inM}))^2 + (V_{zSC_M}(t_{outM}) - V_{zSC_M}(t_{inM}))^2}$$

$$pV_{GAM} = \frac{(V_{xSC_M}(t_{outM}) - V_{xSC_M}(t_{inM})) \cdot V_{xSC}(t_{outM}) + (V_{ySC_M}(t_{outM}) - V_{ySC_M}(t_{inM})) \cdot V_{ySC}(t_{outM})}{\sqrt{V_{xSC}^2(t_{outM}) + V_{ySC}^2(t_{outM}) + V_{zSC}^2(t_{outM})}} +$$

$$+ \frac{(V_{zSC_M}(t_{outM}) - V_{zSC_M}(t_{inM})) \cdot V_{zSC}(t_{outM})}{\sqrt{V_{xSC}^2(t_{outM}) + V_{ySC}^2(t_{outM}) + V_{zSC}^2(t_{outM})}}$$

Если вход в сферу действия Луны не был найден или $dV_{GAM} < Min_{GAM}$, то алгоритм расчёта расстояния перицентра возвращает отрицательный код ответа, а значение функции $f(\theta_A, \theta_B, \varphi_1, \varphi_2)$ не определено. При проведении расчётов было положено, что $Min_{GAM} = 100$ м/с.

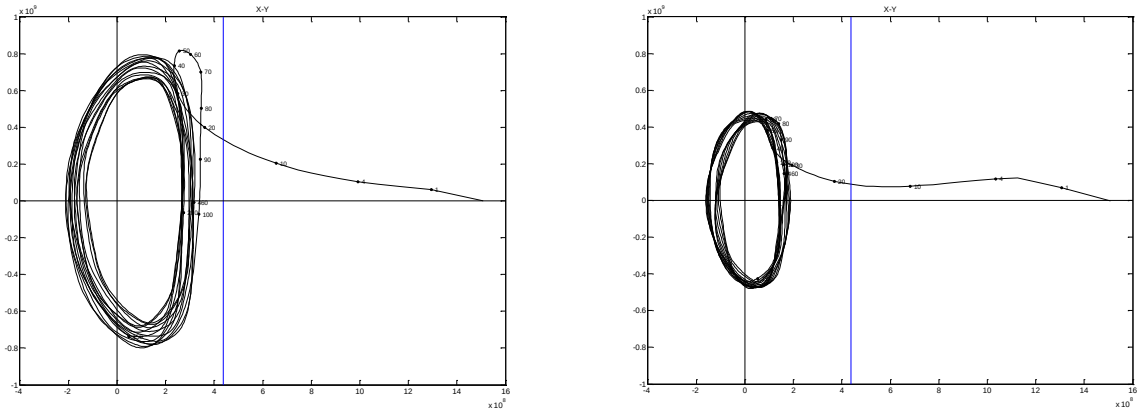


Рис. 2.8 Слева: квазипериодическая орбита, прямой переход с орбиты выведения. Справа: квазипериодическая орбита, переход на которую осуществлён с использованием гравитационного манёвра у Луны. Проекция траекторий на плоскость XY вращающейся СК с центром в точке L_2 .

Для ускорения поиска интервалов времени, в которых возможен перелёт с гравитационным манёвром, используется условие на угол между направлениями от Земли

на Солнце и Луну. Очевидно, что для того, чтобы использовать гравитационный манёвр у Луны для перелёта на квазипериодическую орбиту, Луна и Солнце должны быть расположены определённым образом. Это расположение можно описать углом между направлениями от Земли на Луну и Солнце. Условие перелёта Земля – квазипериодическая орбита с гравитационным манёвром у Луны выполняется раз в месяц. Под моментом перехода на квазипериодическую орбиту понимается момент времени, в который КА пересечёт плоскость, ортогональную направлению Земля – Солнце, и удалённую от центра Земли на расстояние $(1-\theta)r_L$, где $\theta = \frac{17}{24}$, r_L – расстояние от Земли до точки L_2 . На рис. 2.9. показана зависимость угла между направлениями от Земли на Луну и Солнце от времени, полученная с помощью применения вышеописанной методики поиска одноимпульсных траекторий перелёта на квазипериодическую орбиту в окрестности точки L_2 . Красным цветом отмечены интервалы времени, в которые удалось найти переход на квазипериодическую орбиту по указанной схеме. Из графика видно, что моменты перехода на перелётную траекторию к точке L_2 с использованием гравитационного манёвра у Луны следует искать на интервалах времени, когда значение угла между направлениями от Земли на Луну и на Солнце не превосходит 45° .

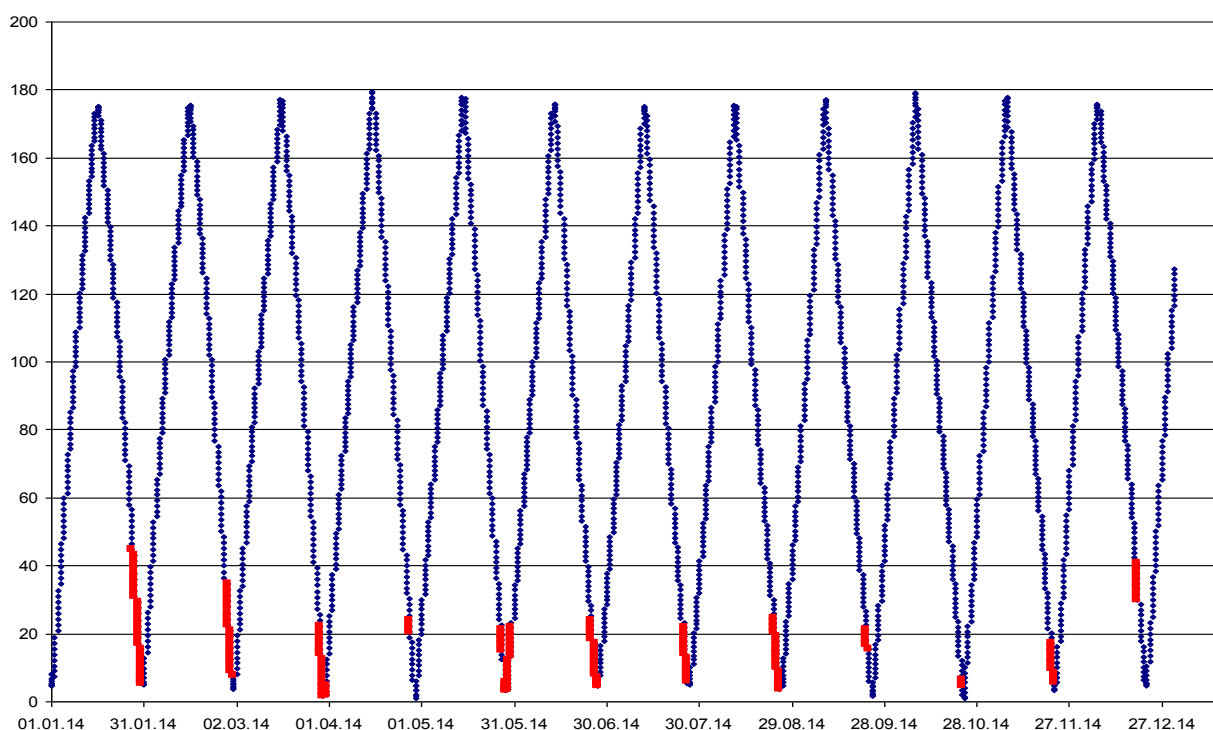


Рис. 2.9 Годовая эволюция угла между направлениями от Земли на Солнце и на Луну

В качестве примера рассмотрим результаты расчёта окон старта и изолиний, задающих перелёты на квазипериодическую орбиту с использованием гравитационного манёвра у Луны в 2014 году. Также рассмотрен случай с предварительным витком вокруг Земли, позволяющий провести определение полученной низкой околоземной орбиты для выявления ошибок выведения. На рис. 2.10 – 2.23 показаны изолинии для перелётов с околокруговой орбиты ИСЗ на квазипериодические орбиты с использованием гравитационного манёвра у Луны (по осям отложены значения фаз φ_1, φ_2 в градусах). На каждом графике приведены множества изолиний, соответствующих перелёту с гравитационным манёвром для заданной даты, имеющих различное время перехода на траекторию перелёта – вместо одной замкнутой изолинии приводится несколько. В таб. 2.2 представлены начальные условия и характеристики перелётных траекторий с наклонением в диапазоне от 51° до 52° . На рис. 2.24 – 2.27 показаны изолинии для траекторий, который совершают дополнительный виток вокруг Земли перед переходом на траекторию перелёта к Луне. В табл. 2.3 приведены начальные условия и характеристики таких траекторий.

Из представленных отображений видно, что гравитационный манёвр, накладывающий определённые ограничения на траекторию перелёта, приводит к изменению характера изолиний – удаётся найти переход лишь на одно семейство квазипериодических орбит – северное или южное; для некоторых месяцев и дат плотность рассчитанных решений оказалась существенно ниже, чем для других. Таким образом, результаты расчёта изолиний могут быть использованы для определения окон стартов на квазипериодическую орбиту с использованием гравитационного манёвра у Луны. В таблице 2.4 приведены окна стартов на 2014 г для перелётов без дополнительного витка вокруг Земли. Эта таблица содержит значение параметра θ_A , для которого был выполнен расчёт, месяц, дату достижения окрестности L_2 и длительность окна стартов. Минимальные значения параметра θ_A , для которых были найдены траектории, принадлежат диапазону от 0.12 до 0.15:

- 0.15 в июле 2014 г;
- 0.14 в январе, феврале и августе 2014г;
- 0.12 для остальных месяцев.

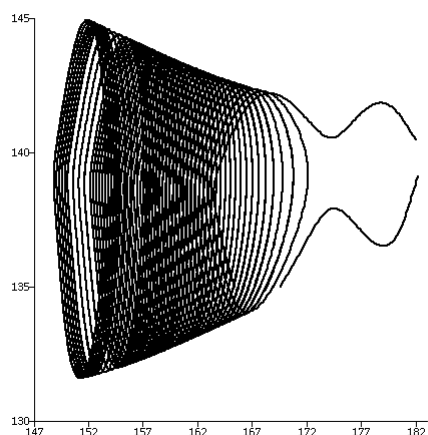


Рис. 2.10 Изолинии для траекторий перелёта на 27 января 2014 г,
 $\theta_A = 0.14, \theta_B = 0.1$

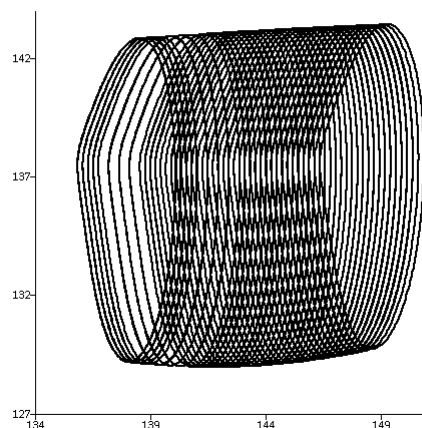


Рис. 2.11 Изолинии для траекторий перелёта на 27 февраля 2014 г,
 $\theta_A = 0.14, \theta_B = 0.1$

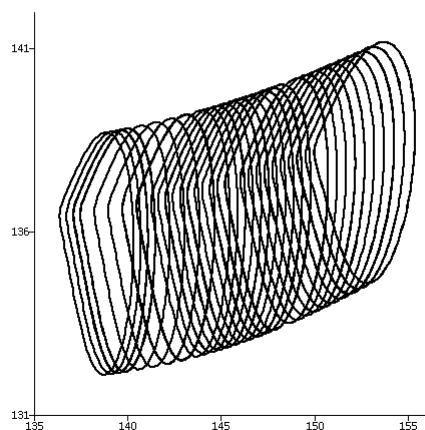


Рис. 2.12 Изолинии для траекторий перелёта на 29 марта 2014 г,
 $\theta_A = 0.14, \theta_B = 0.1$

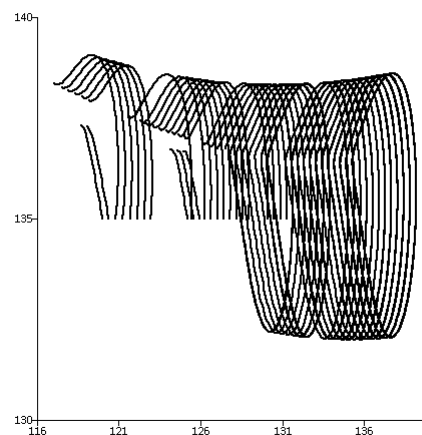


Рис. 2.13 Изолинии для траекторий перелёта на 30 марта 2014 г,
 $\theta_A = 0.12, \theta_B = 0.1$

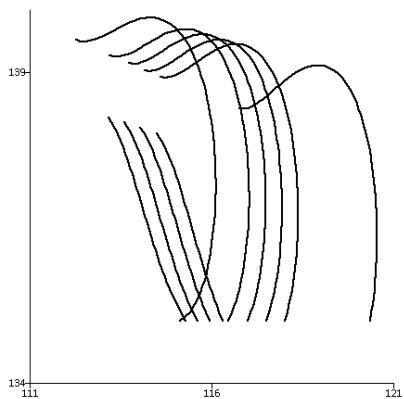


Рис. 2.14 Изолинии для траекторий перелёта на 31 марта 2014 г,
 $\theta_A = 0.12, \theta_B = 0.1$

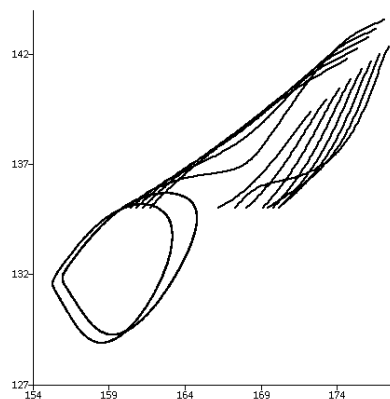


Рис. 2.15 Изолинии для траекторий перелёта на 27 апреля 2014 г,
 $\theta_A = 0.12, \theta_B = 0.1$

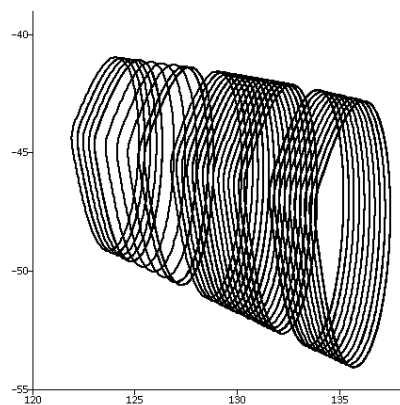


Рис. 2.16 Изолинии для траекторий
перелёта на 29 мая 2014 г,
 $\theta_A = 0.12, \theta_B = 0.1$

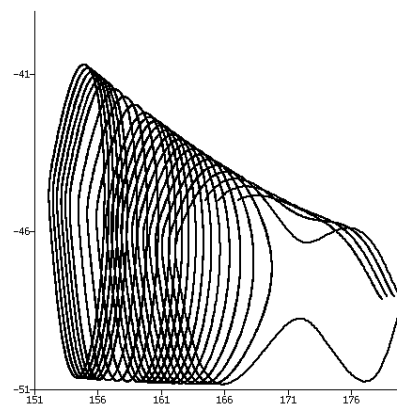


Рис. 2.17 Изолинии для траекторий
перелёта на 25 июня 2014 г,
 $\theta_A = 0.12, \theta_B = 0.1$

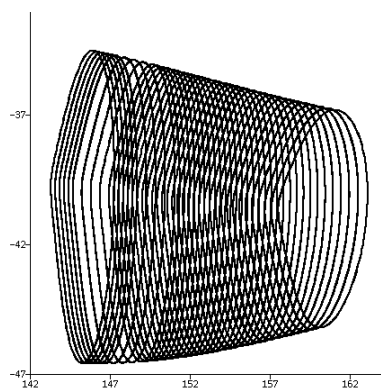


Рис. 2.18 Изолинии для траекторий
перелёта на 25 июля 2014 г,
 $\theta_A = 0.15, \theta_B = 0.1$

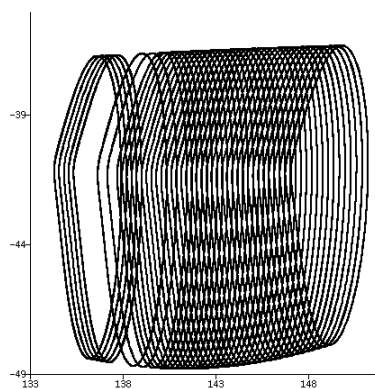


Рис. 2.19 Изолинии для траекторий
перелёта на 24 августа 2014 г,
 $\theta_A = 0.14, \theta_B = 0.1$

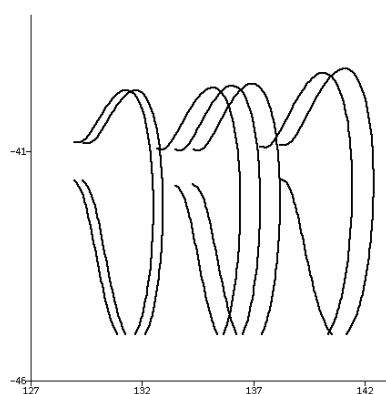


Рис. 2.20 Изолинии для траекторий
перелёта на 22 сентября 2014 г,
 $\theta_A = 0.12, \theta_B = 0.1$

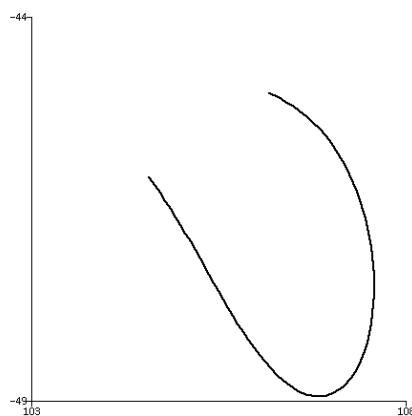


Рис. 2.21 Изолинии для траекторий
перелёта на 23 октября 2014 г,
 $\theta_A = 0.12, \theta_B = 0.1$

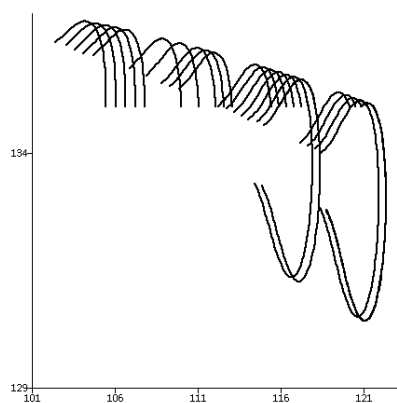


Рис. 2.22 Изолинии для траекторий
перелёта на 21 ноября 2014 г,
 $\theta_A = 0.12$, $\theta_B = 0.1$

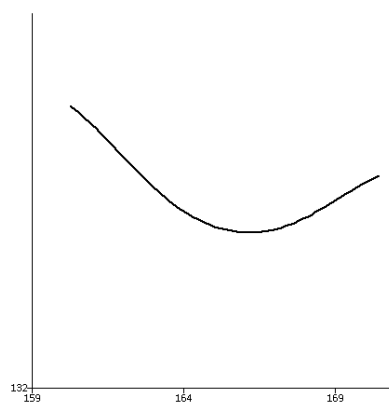


Рис. 2.23 Изолинии для траекторий
перелёта на 18 декабря 2014 г,
 $\theta_A = 0.12$, $\theta_B = 0.1$

Таблица 2.2 Начальные условия и характеристики траекторий перелёта (в сентябре – декабре 2014 г) с орбиты ИСЗ на квазипериодические орбиты с параметрами $\theta_A = 0.12$, $\theta_B = 0.10$. После старта с околокруговой орбиты ИСЗ КА переходит на траекторию полёта к Луне, дополнительные витки не делаются.

φ_1 , рад	φ_2 , рад	Дата и время перелёта в окрестность L_2		Наклон. орбиты перелёта, град	dV_{GAM} , м/с	pV_{GAM} , м/с	Дата и время достижения периселения, ДМВ		расст. перисел., м	i пролётной гиперболы, град.	Длит. полёта до Луны, сутки
2.439617630200	-0.770018811273	2014/09/22	12:30:00	51.04	642.145	547.559	2014/09/08	10:41:11.250	9315590.3	38.88	2.5768
2.478888950239	-0.695706050252	2014/09/22	12:30:00	51.38	427.924	369.085	2014/09/08	09:37:41.647	14965369.1	12.93	2.3711
2.369739302382	-0.772248987510	2014/09/22	17:00:00	51.79	655.141	562.107	2014/09/08	13:27:59.690	9112933.6	38.92	2.5961
2.354696020838	-0.772176955072	2014/09/22	18:00:00	51.98	658.707	566.332	2014/09/08	13:58:52.159	9063023.2	38.89	2.6012
2.390762754380	-0.703471437751	2014/09/22	18:00:00	51.76	433.241	374.945	2014/09/08	13:26:54.233	14818587.5	13.11	2.3786
2.266822254931	-0.768858090193	2014/09/23	00:00:00	51.86	677.082	588.079	2014/09/08	16:29:41.302	8805764.5	38.64	2.6320
2.300254658380	-0.706066644435	2014/09/23	00:00:00	51.96	446.667	389.275	2014/09/08	16:22:52.589	14426077.2	13.41	2.3972
2.285676181059	-0.706587930529	2014/09/23	01:00:00	51.44	447.897	390.911	2014/09/08	16:46:02.193	14404093.4	13.63	2.3992
1.873712661655	-0.807808537458	2014/10/23	10:30:00	51.91	603.065	563.435	2014/10/08	01:51:47.326	11118487.8	19.98	2.7143
1.841470485392	-0.830459589449	2014/10/23	10:30:00	51.75	897.545	855.160	2014/10/08	00:22:28.216	6393521.3	37.36	3.1815
1.792298086683	-0.774815770349	2014/10/23	14:30:00	51.51	652.784	619.467	2014/10/07	22:51:11.329	10252084.3	19.78	2.8085
1.746015114541	-0.781376010507	2014/10/23	15:00:00	51.27	1004.03	980.410	2014/10/07	20:21:59.012	5388122.6	34.50	3.5142
1.747835652631	-0.753383335996	2014/10/23	16:30:00	51.46	683.280	653.853	2014/10/07	20:48:20.123	9761048.6	19.53	2.8717
2.114611428797	2.276275614910	2014/11/21	06:00:00	51.23	528.067	465.092	2014/11/06	17:42:13.318	12836770.4	5.48	2.6736
2.079789471507	2.360454887707	2014/11/21	08:00:00	51.27	660.225	600.631	2014/11/06	17:27:40.855	9757189.1	31.22	2.8931
2.045755003508	2.291025629777	2014/11/21	10:30:00	51.47	556.315	497.089	2014/11/06	17:39:39.736	12202824.9	5.98	2.7212
2.040382888539	2.365190029894	2014/11/21	10:30:00	51.87	683.439	626.777	2014/11/06	17:18:51.531	9384697.0	30.92	2.9393
2.032838815289	2.366272450103	2014/11/21	11:00:00	51.19	682.992	626.789	2014/11/06	17:16:31.403	9404985.1	30.84	2.9395
2.016439495643	2.368089979047	2014/11/21	12:00:00	51.53	694.111	639.250	2014/11/06	17:07:48.520	9230005.3	30.72	2.9622
1.843029805357	2.384597138746	2014/11/21	21:30:00	51.15	815.743	778.756	2014/11/06	13:14:14.129	7595314.7	29.35	3.2524
1.831986609731	2.385272733259	2014/11/21	22:00:00	51.62	830.423	794.828	2014/11/06	12:50:50.294	7403759.6	29.28	3.2920
1.821201804607	2.386044224571	2014/11/21	22:30:00	51.52	840.528	806.310	2014/11/06	12:26:31.856	7283548.6	29.20	3.3205
1.810257969748	2.386816823111	2014/11/21	23:00:00	51.34	850.504	817.688	2014/11/06	12:00:48.355	7167731.1	29.11	3.3496
1.762812618850	2.389500384800	2014/11/22	01:00:00	51.25	909.581	883.409	2014/11/06	09:56:57.967	6490569.5	28.75	3.5325
1.735000552132	2.390188677798	2014/11/22	02:00:00	51.96	970.161	948.935	2014/11/06	08:33:42.659	5836530.5	28.52	3.7417

1.721467962146	2.390705419076	2014/11/22	02:30:00	51.30	991.992	972.618	2014/11/06	07:51:21.764	5619210.8	28.39	3.8270
2.776217976813	2.409783716033	2014/12/19	02:00:00	51.42	572.126	503.920	2014/12/04	23:32:03.215	11560251.1	31.66	2.8209
3.014777667947	2.385650608108	2014/12/19	02:00:00	51.47	685.328	629.891	2014/12/04	00:30:46.734	9429739.5	30.70	2.9967
2.759406720631	2.412138893530	2014/12/19	02:30:00	51.43	566.341	497.516	2014/12/05	01:00:04.260	11686174.8	31.70	2.8137
2.744538140955	2.414343137262	2014/12/19	03:00:00	51.19	560.109	490.951	2014/12/05	02:16:32.622	11834779.0	31.72	2.8055
3.042201161278	2.384416411282	2014/12/19	03:00:00	51.27	700.671	647.239	2014/12/03	21:39:05.332	9186714.8	30.56	3.0251
2.729705654570	2.416338131273	2014/12/19	03:30:00	51.77	558.586	489.022	2014/12/05	03:30:29.585	11865794.6	31.77	2.8043
2.704640999421	2.420194485837	2014/12/19	04:30:00	51.41	549.274	478.998	2014/12/05	05:35:29.914	12084052.7	31.79	2.7931
2.693242876678	2.422033093617	2014/12/19	05:00:00	51.06	544.252	473.916	2014/12/05	06:30:47.559	12215882.0	31.78	2.7865
2.680947858147	2.423655574401	2014/12/19	05:30:00	51.93	545.744	474.846	2014/12/05	07:28:45.866	12162008.1	31.83	2.7901
2.670847688894	2.425432937591	2014/12/19	06:00:00	51.25	539.509	468.557	2014/12/05	08:17:17.854	12324532.6	31.80	2.7820
3.126074245117	2.382861275817	2014/12/19	07:30:00	51.62	758.987	712.868	2014/12/03	12:39:57.006	8323811.3	30.17	3.1434
2.630905137171	2.431780871194	2014/12/19	08:00:00	51.03	529.425	458.018	2014/12/05	11:19:17.587	12590046.8	31.78	2.7709
3.140435683142	2.382963276755	2014/12/19	08:30:00	51.80	770.768	726.099	2014/12/03	11:05:46.507	8160600.0	30.10	3.1694
3.153390289189	2.383396947639	2014/12/19	09:30:00	51.01	774.670	731.140	2014/12/03	09:40:53.443	8121675.1	30.02	3.1782
2.594086044851	2.437513872901	2014/12/19	10:00:00	51.52	525.304	453.354	2014/12/05	13:57:33.609	12693891.8	31.76	2.7687
3.160005757927	2.383447594984	2014/12/19	10:00:00	51.46	783.058	740.176	2014/12/03	08:57:29.253	7999694.1	30.00	3.1975
3.166250151241	2.383607466062	2014/12/19	10:30:00	51.53	788.372	746.186	2014/12/03	08:16:02.691	7929855.3	29.98	3.2098
2.577265660097	2.440326278150	2014/12/19	11:00:00	51.15	520.791	448.916	2014/12/05	15:07:21.816	12825466.8	31.70	2.7637
3.172147941073	2.383877377624	2014/12/19	11:00:00	51.20	790.533	748.842	2014/12/03	07:37:17.052	7906053.4	29.94	3.2150
2.555365833969	2.335594214926	2014/12/19	12:00:00	51.68	464.372	389.695	2014/12/05	16:46:35.628	14647160.6	12.07	2.6768
2.536240863615	2.446812926972	2014/12/19	13:30:00	51.51	517.692	445.652	2014/12/05	17:48:11.055	12917962.2	31.61	2.7632
2.528597901278	2.448106950560	2014/12/19	14:00:00	51.28	515.776	443.597	2014/12/05	18:18:01.134	12965162.4	31.56	2.7617
2.512839606383	2.450512702723	2014/12/19	15:00:00	51.67	516.567	444.313	2014/12/05	19:15:23.965	12945348.4	31.53	2.7643
2.490049735846	2.454074894637	2014/12/19	16:30:00	51.91	516.456	444.312	2014/12/05	20:35:25.799	12959512.3	31.44	2.7662
2.776217976813	2.409783716033	2014/12/19	02:00:00	51.42	572.126	503.920	2014/12/04	23:32:03.215	11560251.1	31.66	2.8209
3.014777667947	2.385650608108	2014/12/19	02:00:00	51.47	685.328	629.891	2014/12/04	00:30:46.734	9429739.5	30.70	2.9967
2.759406720631	2.412138893530	2014/12/19	02:30:00	51.43	566.341	497.516	2014/12/05	01:00:04.260	11686174.8	31.70	2.8137
2.744538140955	2.414343137262	2014/12/19	03:00:00	51.19	560.109	490.951	2014/12/05	02:16:32.622	11834779.0	31.72	2.8055
3.042201161278	2.384416411282	2014/12/19	03:00:00	51.27	700.671	647.239	2014/12/03	21:39:05.332	9186714.8	30.56	3.0251
2.729705654570	2.416338131273	2014/12/19	03:30:00	51.77	558.586	489.022	2014/12/05	03:30:29.585	11865794.6	31.77	2.8043
2.704640999421	2.420194485837	2014/12/19	04:30:00	51.41	549.274	478.998	2014/12/05	05:35:29.914	12084052.7	31.79	2.7931
2.693242876678	2.422033093617	2014/12/19	05:00:00	51.06	544.252	473.916	2014/12/05	06:30:47.559	12215882.0	31.78	2.7865
2.680947858147	2.423655574401	2014/12/19	05:30:00	51.93	545.744	474.846	2014/12/05	07:28:45.866	12162008.1	31.83	2.7901
2.670847688894	2.425432937591	2014/12/19	06:00:00	51.25	539.509	468.557	2014/12/05	08:17:17.854	12324532.6	31.80	2.7819

3.126074245117	2.382861275817	2014/12/19	07:30:00	51.62	758.987	712.868	2014/12/03	12:39:57.006	8323811.3	30.17	3.1434
2.630905137171	2.431780871194	2014/12/19	08:00:00	51.03	529.425	458.018	2014/12/05	11:19:17.587	12590046.8	31.78	2.7709
3.140435683142	2.382963276755	2014/12/19	08:30:00	51.80	770.768	726.099	2014/12/03	11:05:46.507	8160600.0	30.10	3.1694
3.153390289189	2.383396947639	2014/12/19	09:30:00	51.01	774.670	731.140	2014/12/03	09:40:53.443	8121675.1	30.02	3.1782
2.594086044851	2.437513872901	2014/12/19	10:00:00	51.52	525.304	453.354	2014/12/05	13:57:33.609	12693891.8	31.76	2.7687
3.160005757927	2.383447594984	2014/12/19	10:00:00	51.46	783.058	740.176	2014/12/03	08:57:29.253	7999694.1	30.00	3.1975
3.166250151241	2.383607466062	2014/12/19	10:30:00	51.53	788.372	746.186	2014/12/03	08:16:02.691	7929855.3	29.98	3.2098
2.577265660097	2.440326278150	2014/12/19	11:00:00	51.15	520.791	448.916	2014/12/05	15:07:21.816	12825466.8	31.70	2.7637
3.172147941073	2.383877377624	2014/12/19	11:00:00	51.20	790.533	748.842	2014/12/03	07:37:17.052	7906053.4	29.94	3.2150
2.555365833969	2.335594214926	2014/12/19	12:00:00	51.68	464.372	389.695	2014/12/05	16:46:35.628	14647160.6	12.07	2.6767
2.536240863615	2.446812926972	2014/12/19	13:30:00	51.51	517.692	445.652	2014/12/05	17:48:11.055	12917962.2	31.61	2.7632
2.528597901278	2.448106950560	2014/12/19	14:00:00	51.28	515.776	443.597	2014/12/05	18:18:01.134	12965162.4	31.56	2.7617
2.512839606383	2.450512702723	2014/12/19	15:00:00	51.67	516.567	444.313	2014/12/05	19:15:23.965	12945348.4	31.53	2.7643
2.490049735846	2.454074894637	2014/12/19	16:30:00	51.91	516.456	444.312	2014/12/05	20:35:25.799	12959512.3	31.44	2.7662

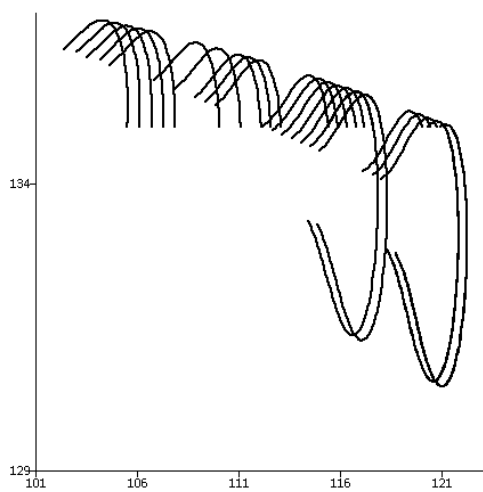


Рис. 2.24 Изолинии для траекторий
перелёта с дополнительным витком вокруг
Земли на 21 ноября 2014 г,
 $\theta_A = 0.12$, $\theta_B = 0.1$

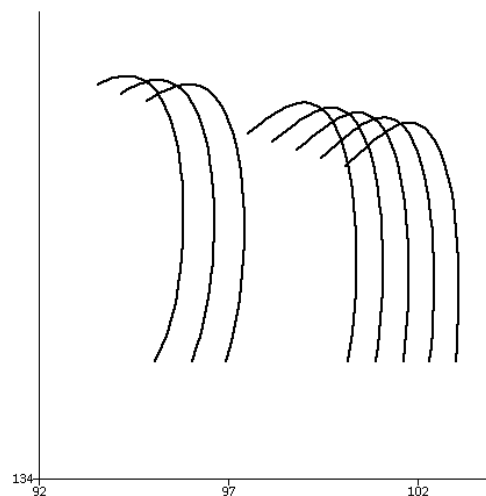


Рис. 2.25 Изолинии для траекторий
перелёта с дополнительным витком вокруг
Земли на 22 ноября 2014 г,
 $\theta_A = 0.12$, $\theta_B = 0.1$

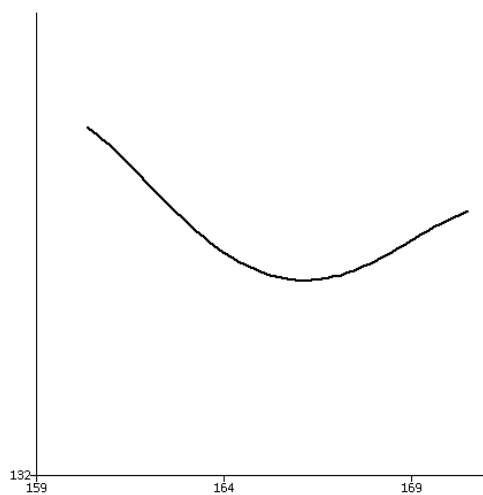


Рис. 2.26 Изолинии для траекторий
перелёта с дополнительным витком вокруг
Земли на 18 декабря 2014 г,
 $\theta_A = 0.12$, $\theta_B = 0.1$

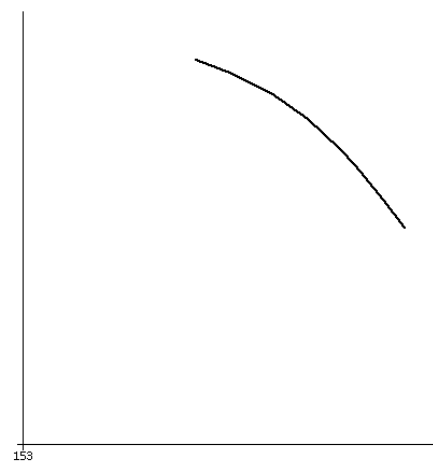


Рис. 2.27 Изолинии для траекторий
перелёта с дополнительным витком вокруг
Земли на 19 декабря 2014 г,
 $\theta_A = 0.12$, $\theta_B = 0.1$

Таблица 2.3 Начальные условия и характеристики траекторий перелёта (в сентябре – декабре 2014 г) с орбиты ИСЗ на квазипериодические орбиты с параметрами $\theta_A = 0.12$, $\theta_B = 0.10$. До перехода на траекторию перелёта к Луне выполняется дополнительный виток вокруг Земли.

φ_1 , рад	φ_2 , рад	Дата и время перелёта в окрестность L_2		Наклон. орбиты перелёта, град	dV_{GAM} , м/с	pV_{GAM} , м/с	Дата и время достижения периселения, ДМВ		расст. перисел., м	i пролётой гиперболы, град.	Длит. полёта до Луны, сутки
2.107640271876	2.278821569578	2014/11/21	06:30:00	51.37	528.862	466.931	2014/11/06	17:44:59.390	12824082.2	5.64	17.348
2.096684412385	2.358426341116	2014/11/21	07:00:00	51.16	636.607	576.369	2014/11/06	17:29:33.275	10206397.8	31.05	15.618
2.089115269728	2.359458921127	2014/11/21	07:30:00	51.14	639.732	579.865	2014/11/06	17:30:22.569	10152384.6	31.01	15.572
2.081104381127	2.360389188919	2014/11/21	08:00:00	51.75	646.865	587.439	2014/11/06	17:30:00.710	10018836.8	30.98	15.480
2.042291226179	2.365418467892	2014/11/21	10:30:00	51.52	663.764	606.884	2014/11/06	17:22:39.466	9752488.4	30.72	15.241
2.042025055746	2.365357491370	2014/11/21	10:30:00	51.94	666.450	609.624	2014/11/06	17:22:08.045	9701122.3	30.73	15.213
2.034420001148	2.366422796472	2014/11/21	11:00:00	51.37	666.765	610.401	2014/11/06	17:19:46.019	9707677.0	30.66	15.199
2.038918073861	2.292937953799	2014/11/21	11:00:00	51.03	552.572	494.361	2014/11/06	17:39:10.468	12317441.9	6.17	16.816
2.034439060660	2.366427206720	2014/11/21	11:00:00	51.34	666.574	610.206	2014/11/06	17:19:48.331	9711329.7	30.66	15.201
2.026263268142	2.367366091732	2014/11/21	11:30:00	51.55	672.095	616.324	2014/11/06	17:15:49.352	9619740.5	30.61	15.132
2.018444356361	2.368396705129	2014/11/21	12:00:00	51.11	673.440	618.425	2014/11/06	17:11:18.381	9615279.9	30.54	15.106
2.010036876022	2.369306370499	2014/11/21	12:30:00	51.47	680.127	625.554	2014/11/06	17:06:38.601	9497199.2	30.50	15.027
2.001979484980	2.370301152266	2014/11/21	13:00:00	51.17	682.644	628.668	2014/11/06	17:01:26.800	9465120.9	30.43	14.991
1.993667951840	2.371250097880	2014/11/21	13:30:00	51.13	687.065	633.762	2014/11/06	16:55:11.114	9398972.0	30.38	14.935
1.932290104574	2.377585178273	2014/11/21	17:00:00	51.80	729.022	681.369	2014/11/06	15:49:16.841	8777163.6	30.00	14.475
1.914168299034	2.379414263365	2014/11/21	18:00:00	51.43	738.843	692.837	2014/11/06	15:24:18.772	8645682.1	29.86	14.372
1.895016053121	2.381101158087	2014/11/21	19:00:00	51.74	754.921	710.977	2014/11/06	14:53:55.361	8419921.1	29.75	14.226
1.740960307613	2.391908063692	2014/11/22	02:00:00	51.05	905.055	879.962	2014/11/06	08:54:44.924	6577756.5	28.74	13.378
1.725865748649	2.392105578228	2014/11/22	02:30:00	51.95	943.166	920.827	2014/11/06	08:07:38.716	6145505.0	28.65	13.325
1.712372406906	2.392702978768	2014/11/22	03:00:00	51.33	961.353	940.744	2014/11/06	07:24:23.292	5957001.9	28.54	13.312
2.768899646517	2.411997207650	2014/12/19	02:30:00	51.87	537.950	470.833	2014/12/05	00:18:09.135	12451531.8	31.22	17.573
2.763974244863	2.313295181248	2014/12/19	02:30:00	51.74	470.973	401.222	2014/12/05	00:56:53.441	14544530.1	9.09	19.234
3.046286093004	2.387522906067	2014/12/19	03:30:00	51.52	652.785	597.474	2014/12/03	21:20:58.714	10108909.7	30.80	15.492
2.723994081751	2.417836578395	2014/12/19	04:00:00	51.83	526.782	458.794	2014/12/05	04:07:13.572	12723899.0	31.15	17.825

2.711400322267	2.419573633237	2014/12/19	04:30:00	51.55	522.667	454.580	2014/12/05	05:09:45.529	12833604.1	31.10	17.914
3.078119388182	2.386709329336	2014/12/19	05:00:00	51.08	668.858	615.797	2014/12/03	17:58:05.919	9841746.4	30.67	15.258
3.088101967652	2.386337936723	2014/12/19	05:30:00	51.78	679.707	627.392	2014/12/03	16:53:26.958	9644579.8	30.65	15.129
2.675983978251	2.424409916931	2014/12/19	06:00:00	51.72	516.808	448.065	2014/12/05	08:00:03.070	12973601.7	31.03	18.061
2.654610159334	2.427390798459	2014/12/19	07:00:00	51.83	513.926	445.084	2014/12/05	09:38:21.327	13054728.4	30.97	18.134
3.113328798264	2.386184251202	2014/12/19	07:00:00	51.50	694.003	643.830	2014/12/03	14:09:30.433	9423767.0	30.55	14.945
3.121004498041	2.386219744641	2014/12/19	07:30:00	51.38	698.266	648.623	2014/12/03	13:19:51.168	9355629.6	30.51	14.891
2.625533565035	2.431606794898	2014/12/19	08:30:00	51.33	507.569	438.574	2014/12/05	11:49:29.889	13229200.4	30.82	18.278
2.615774374698	2.432964245303	2014/12/19	09:00:00	51.73	508.373	439.249	2014/12/05	12:31:10.369	13204410.7	30.82	18.271
3.180430480072	2.387275329013	2014/12/19	12:00:00	51.78	743.045	698.700	2014/12/03	06:48:10.571	8668209.2	30.28	14.415
3.186186818643	2.387481096974	2014/12/19	12:30:00	51.87	748.029	704.253	2014/12/03	06:09:50.111	8594794.1	30.26	14.369
3.202344528015	2.388372475098	2014/12/19	14:00:00	51.35	756.551	714.069	2014/12/03	04:23:04.341	8478268.3	30.18	14.282

Таблица 2.4 Даты перелёта в окрестность L_2 для 2014 г. с использованием гравитационного манёвра у Луны

месяц	θ_A	дата старта	продолжительность окна стартов, часы
январь	0.14	2014/01/28	36
	0.15	2014/01/28	72
февраль	0.14	2014/02/27	40
	0.15	2014/02/26	48
март	0.12	2014/03/29	46
апрель	0.12	2014/04/27	24
май	0.12	2014/05/29	20
	0.13	2014/05/29	28
	0.14	2014/05/29	36
	0.15	2014/05/29	52
июнь	0.12	2014/06/25	22
	0.13	2014/06/25	33.5
	0.14	2014/06/25	40.5
	0.15	2014/06/25	60
июль	0.15	2014/07/25	41
август	0.14	2014/08/24	14.5
	0.15	2014/08/23	57.5
сентябрь	0.12	2014/09/22	12.5
октябрь	0.12	2014/10/23	6
ноябрь	0.12	2014/11/21	23.5
декабрь	0.12	2014/12/18	22

2.3 Построение начального приближения для траектории одноимпульсного перелёта с низкой околоземной орбиты на квазипериодическую орбиту в окрестности точки либрации

Заключительный раздел главы содержит описание алгоритма, позволяющего привязать найденные траектории к выбранной дате старта и выделить те из них, наклонение которых совпадает с наклонением орбиты выведения – это условие позволяет избежать значительных энергетических затрат на изменение наклонения при выведении КА на траекторию перелёта к точке L_2 . На данном этапе движение КА по-прежнему моделируется в рамках задачи трёх тел, однако выполняется уточнение времени старта и привязка времени перехода с орбиты выведения на траекторию перелёта к времени UTC.

2.3.1 Алгоритм селекции точек построенных изолиний с учетом сохранения наклонения орбиты выведения для траектории перелёта

Алгоритм, рассмотренный в этом подразделе, позволяет провести предварительную селекцию полученного множества точек построенных изолиний с учетом следующих критериев:

- заданное наклонение орбиты выведения должно сохраняться для траектории перелёта на указанную дату;
- точки изолинии должны отстоять друг от друга не менее чем на 0.001 радиан.

Первое условие обеспечивает экономию импульса характеристической скорости для перехода с орбиты выведения на траекторию перелёта в окрестность точки либрации, так как удастся избежать изменения плоскости орбиты, сопряженного с большими энергетическими затратами. Второе условие многократно сокращает объем вычислений, препятствуя расчёту избыточного числа одинаковых траекторий с минимальными отличиями во времени старта.

Рассмотрим алгоритм селекции точек изолинии, соответствующих заданному наклонению траектории перелёта на указанную дату. Входными данными алгоритма являются:

- точки рассчитанных изолиний – параметры перехода в окрестность точки L_2
 $\theta_A, \theta_B, \varphi_1, \varphi_2$;
- дата перехода с орбиты выведения на траекторию перелёта;
- максимальное и минимальное значения наклонения траектории перелёта $i_{\max}, i_{\min}$.

Выходной информацией алгоритма являются точки изолиний, удовлетворяющие указанному диапазону наклонений траектории перелёта. Для дальнейшего изложения введём вращающуюся СК. Начало СК расположено в барицентре системы Солнце – Земля

– Луна. Ось OX направлена на барицентр системы Земля – Луна. Плоскость XY совпадает с плоскостью орбиты барицентра Земля – Луна. Ось OY сонаправлена с вектором скорости барицентра Земля – Луна. Ось OZ дополняет систему до правой. Далее будем обозначать эту систему как *rot*. Также введём инерциальную СК, направления осей которой совпадают с СК *rot* в интересующий нас момент времени, а центр находится в центре масс Земли. Будем обозначать эту СК как *fix_rot*.

Алгоритм устроен следующим образом: для выбранной даты рассчитывается матрица $\mathbf{A}_{j2000}^{rot}$ перевода вектора состояния из СК J2000 во вращающуюся СК. Для этого с помощью ежегодников (см раздел 3.1) вычисляются положения и скорости барицентра системы Земля – Луна относительно барицентра всей системы, затем рассчитывается положение барицентра системы Земля-Луна в гелиоцентрической СК:

$$\mathbf{r}_{БЦЗЛ} = \frac{\mathbf{r}_Л + \frac{m_3}{m_Л} \cdot \mathbf{r}_3}{\left(1 + \frac{m_3}{m_Л}\right)}, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{БЦЗЛ} = \frac{\frac{d}{dt} \mathbf{r}_Л + \frac{m_3}{m_Л} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{r}_3}{\left(1 + \frac{m_3}{m_Л}\right)}. \quad (2.12)$$

По полученному вектору состояния барицентра Земля-Луна вычисляются элементы орбиты барицентра в гелиоцентрической СК, затем с их помощью рассчитывается матрица преобразования $\mathbf{A}_{j2000}^{rot}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{j2000}^{rot} &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{P} \\ \mathbf{R} &= \begin{pmatrix} -\cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & -\cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{P} &= \begin{pmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{pmatrix} \\ P_x &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i, \\ P_y &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i, \\ P_z &= \sin \omega \sin i, \\ Q_x &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i, \\ Q_y &= -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i, \\ Q_z &= \cos \omega \sin i, \\ R_x &= \sin i \sin \Omega, \\ R_y &= -\sin i \cos \Omega, \\ R_z &= \cos i \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$\mathbf{P}$ – матрица перехода в СК, связанную с плоскостью орбиты;

$\mathbf{R}$ – матрица, описывающая поворот системы координат относительно нулевого положения, связанный с движением барицентра по гелиоцентрической орбите;

ω – аргумент перицентра;

Ω – долгота восходящего узла;

i – наклонение;

$\mathcal{J}$ – истинная аномалия.

Далее по входным параметрам $\varphi_1, \varphi_2, \theta_A, \theta_B$ траектории в окрестности точки L_2 с помощью функции $f(\varphi_1, \varphi_2, \theta_A, \theta_B)$ в рамках задачи двух тел рассчитываются элементы кеплеровой геоцентрической орбиты КА в СК fix_rot на момент перехода из сферы действия Земли в окрестность L_2 . По полученным элементам орбиты рассчитывается геоцентрический вектор состояния КА на момент прохождения перицентра $\mathbf{r}_{fix_rot}, \mathbf{v}_{fix_rot}$, которые затем пересчитываются в СК J2000:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{j2000} &= (\mathbf{A}_{j2000}^{rot})^T \cdot \mathbf{r}_{fix_rot} \\ \mathbf{v}_{j2000} &= (\mathbf{A}_{j2000}^{rot})^T \cdot \mathbf{v}_{fix_rot}\end{aligned}\quad (2.14)$$

Зная вектор состояния КА в СК J2000, можно вычислить элементы геоцентрической орбиты КА в этой СК. Если $i_{\max} \geq i \geq i_{\min}$, параметры движения в окрестности точки L_2 печатаются в файл выдачи. Алгоритм завершает работу при завершении цикла по точкам изолиний.

Результат селекции траекторий перелёта приведён в таблице 2.5.

Таблица 2.5 Пример точек изолиний, соответствующих условию сохранения наклонения орбиты выведения для траектории перелёта (всего данному условию по наклонению удовлетворяют 148 точек)

$\theta = \frac{17}{24}$	θ_A	θ_B	$\varphi_1(0; 2\pi)$	$\varphi_2(-\pi; \pi)$	i , град
0.708333	0.2	0.85	2.637152069	-0.668732772	51.556
0.708333	0.2	0.85	2.150594249	-0.555716907	51.347
0.708333	0.2	0.85	2.03676963	-0.677082991	51.377
0.708333	0.2	0.85	2.637152069	-0.668732772	51.556
0.708333	0.2	0.85	2.150594249	-0.555716907	51.347
0.708333	0.2	0.85	2.03676963	-0.677082991	51.377
0.708333	0.2	0.85	2.69107784	-0.827364629	51.818
0.708333	0.2	0.85	2.69107784	-0.827364629	51.818
0.708333	0.2	0.85	2.638616167	-0.669339315	51.265

$\theta = \frac{17}{24}$	θ_A	θ_B	$\varphi_1(0; 2\pi)$	$\varphi_2(-\pi; \pi)$	i , град
0.708333	0.2	0.85	2.153018524	-0.555780708	51.774
0.708333	0.2	0.85	2.638616167	-0.669339315	51.265
0.708333	0.2	0.85	2.153018524	-0.555780708	51.774
0.708333	0.2	0.85	2.638352502	-0.669229877	51.318
0.708333	0.2	0.85	2.15258964	-0.555768749	51.699
0.708333	0.2	0.85	2.638352502	-0.669229877	51.318
0.708333	0.2	0.85	2.15258964	-0.555768749	51.699
0.708333	0.2	0.85	2.691518396	-0.827239182	51.673
0.708333	0.2	0.85	2.691518396	-0.827239182	51.673
0.708333	0.2	0.85	2.639339543	-0.669641266	51.12
0.708333	0.2	0.85	2.154177803	-0.55581587	51.977
0.708333	0.2	0.85	2.639339543	-0.669641266	51.12
0.708333	0.2	0.85	2.154177803	-0.55581587	51.977
0.708333	0.2	0.85	2.690691193	-0.827473513	51.946
0.708333	0.2	0.85	2.038185671	-0.678247629	51.944
0.708333	0.2	0.85	2.690691193	-0.827473513	51.946
0.708333	0.2	0.85	2.038185671	-0.678247629	51.944
0.708333	0.2	0.85	2.63823284	-0.669180169	51.341
0.708333	0.2	0.85	2.152394298	-0.55576247	51.665
0.708333	0.2	0.85	2.63823284	-0.669180169	51.341
0.708333	0.2	0.85	2.152394298	-0.55576247	51.665
0.708333	0.2	0.85	2.038324732	-0.67836089	52
0.708333	0.2	0.85	2.038324732	-0.67836089	52
0.708333	0.2	0.85	2.691339122	-0.827290317	51.732
0.708333	0.2	0.85	2.691339122	-0.827290317	51.732
0.708333	0.2	0.85	2.151957184	-0.555750975	51.588
0.708333	0.2	0.85	2.151957184	-0.555750975	51.588
0.708333	0.2	0.85	2.154101269	-0.555813479	51.963
0.708333	0.2	0.85	2.154101269	-0.555813479	51.963

На заключительном этапе поиска одноимпульсных траекторий в рамках метода изолиний применяется алгоритм, реализующий отсев близко расположенных точек для сокращения количества однотипных траекторий, рассчитываемых на каждую выбранную дату. После фильтрации множества точек изолинии с условием, что разность между

соседними точками по φ_1 или по φ_2 должна составлять не менее 0.001 радиана, их количество сокращается в среднем в 13 раз.

В таблице 2.6 приведены точки изолинии, прошедшие фильтрацию.

Таблица 2.6 Точки изолиний, соответствующие условию сохранения наклонения орбиты выведения для траектории перелёта с минимальным расстоянием равным 0.001 радиана (приведены все точки)

$\theta = \frac{17}{24}$	θ_A	θ_B	$\varphi_1(0; 2\pi)$	$\varphi_2(-\pi; \pi)$	i , град
0.708333	0.2	0.85	2.637152	-0.66873	51.556
0.708333	0.2	0.85	2.150594	-0.55572	51.347
0.708333	0.2	0.85	2.03677	-0.67708	51.377
0.708333	0.2	0.85	2.691078	-0.82736	51.818
0.708333	0.2	0.85	2.638616	-0.66934	51.265
0.708333	0.2	0.85	2.153019	-0.55578	51.774
0.708333	0.2	0.85	2.154178	-0.55582	51.977
0.708333	0.2	0.85	2.038186	-0.67825	51.944
0.708333	0.2	0.85	2.151957	-0.55575	51.588
0.708333	0.2	0.85	2.692409	-0.82698	51.377
0.708333	0.2	0.85	2.639624	-0.66976	51.063
0.708333	0.2	0.85	2.635278	-0.66796	51.924
0.708333	0.2	0.85	2.149061	-0.55568	51.075

2.3.2 Алгоритм уточнения времени старта с Земли и времени перехода с низкой околоземной орбиты на траекторию перелёта

Алгоритм, рассмотренный в этом разделе, позволяет определить моменты старта с Земли и перехода на траекторию перелёта от Земли на квазипериодическую орбиту вокруг точки L_2 . Входной информацией алгоритма являются следующие данные:

- параметры перехода в окрестность L_2 : $\theta_A, \theta_B, \varphi_1, \varphi_2$;
- вектор состояния орбиты выведения в гринвичской СК;
- дата старта с Земли.

Выходной информацией алгоритма являются следующие параметры:

- момент времени перехода КА на траекторию перелёта к точке либрации в перицентре отлетной орбиты;
- смещение времени перехода на траекторию перелёта относительно конца активного участка выведения на низкую околоземную орбиту, выраженное в секундах, определяющее момент перехода на траекторию перелёта;
- вектор состояния КА $(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ на момент перехода на траекторию перелёта;
- оценка импульса перехода с орбиты выведения на траекторию перелёта;
- параметры геоцентрической кеплеровой траектории: i, Ω, ω .

Выходные параметры используются в качестве начального приближения при решении краевой задачи, рассматриваемой в разделе 3.2.

Рассмотрим общую концепцию алгоритма, а затем перейдем к его подробному изложению.

Алгоритм основан на следующих свойствах. Вектор состояния КА на момент перицентра траектории перелёта во вращающейся СК не зависит от времени. Если задать время, то вектор состояния КА на момент перицентра траектории перелёта будет определен в СК J2000. Вектор состояния орбиты выведения КА в гринвичской СК определяет наклонение орбиты выведения. По вектору положения КА в перицентре траектории перелёта и наклонению орбиты выведения определяется долгота восходящего узла орбиты выведения и аргумент широты КА u_t на этой орбите на момент времени, когда КА достигнет положения перицентра траектории перелёта. С другой стороны, долгота восходящего узла орбиты выведения определяет время конца активного участка выведения КА и, следовательно, аргумент широты КА u_l на момент времени

прохождения перицентра траектории перелёта. В общем случае $u_t \neq u_l$. Разница $u_t - u_l$ зависит от задаваемого момента времени прохождения перицентра траектории перелёта.

Требуется найти такой момент времени, чтобы $|u_t - u_l| < \varepsilon_u$.

Рассмотрим последовательность вычислений, позволяющих решить поставленную задачу:

1. Вычисление элементов орбиты КА на траектории перелёта на момент перицентра выполняется с помощью функции $f(\varphi_1, \varphi_2, \theta_A, \theta_B)$.
2. По полученным элементам орбиты КА рассчитывается его вектор состояния $\mathbf{x}_0$ в момент прохождения перицентра орбиты перелёта в геоцентрической вращающейся СК.
3. Подаваемый на вход алгоритма вектор состояния КА $\mathbf{x}_g$ на орбите выведения на момент конца активного участка, записанный в гринвичской вращающейся СК, преобразуется в гринвичскую СК, фиксированную на момент отделения КА от РН (элементы, записанные в этой СК, будем обозначать индексом fg):

$$\begin{aligned} x_{fg} &= x_g, & \dot{x}_{fg} &= \dot{x}_g - y_g \omega_3, \\ y_{fg} &= y_g, & \dot{y}_{fg} &= \dot{y}_g + x_g \omega_3, \\ z_{fg} &= z_g, & \dot{z}_{fg} &= \dot{z}_g, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где ω_3 – угловая скорость вращения Земли

4. По полученному на этапе 3 вектору состояния $\mathbf{x}_{fg}$ рассчитываются элементы орбиты выведения в фиксированной на момент отделения гринвичской СК, в том числе Ω_{fg} и i_{fg}
5. Весь дальнейший расчёт (кроме п.12) происходит в цикле по возможным моментам перехода на траекторию перелёта в пределах заданной даты начиная с 0 часов 0 минут 0 секунд (выбранный шаг составляет 30 сек). На каждом шаге рассчитывается матрица $\mathbf{A}_{j2000}^{rot}$ перехода из СК J2000 во вращающуюся барицентрическую СК, полученный на шаге 2 вектор $\mathbf{x}_0$ с помощью этой матрицы (транспонированной) преобразуется в $\mathbf{x}_{j2000}$. По полученному вектору рассчитываются элементы орбиты перелёта в СК J2000 на момент прохождения перицентра, в том числе $i_{j2000}, \Omega_{j2000}, \delta_{j2000}, \omega_{j2000}, u_{j2000}$.

6. По полученному вектору состояния $\mathbf{x}_{j2000}$ и наклонению орбиты выведения i_{fg} рассчитываются возможные значения долготы восходящего узла орбиты перелёта Ω и аргумента широты u .

Алгоритм определения долготы восходящего узла Ω и аргумента широты u по вектору положения КА $(x, y, z)^T$ и наклонению i основан на решении уравнения:

$$a \sin(\Omega) + b \cos(\Omega) + c = 0, \text{ где}$$

$$a = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad b = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad c = \frac{z \cos i}{\sin i \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

В общем случае уравнение имеет два решения Ω_1 и Ω_2 . Значение аргумента широты u_j , соответствующее значению Ω_j , $j=1,2$, определяется по значениям тригонометрических функций $\cos(u_j)$ и $\sin(u_j)$:

$$\cos u_j = \begin{cases} \frac{1}{\cos \Omega_j \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \left(x + \frac{z \cos i \sin \Omega_j}{\sin i} \right), & \text{если } |\cos \Omega_j| > |\sin \Omega_j|, \\ \frac{1}{\cos \Omega_j \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \left(y - \frac{z \cos i \cos \Omega_j}{\sin i} \right), & \text{если } |\cos \Omega_j| \leq |\sin \Omega_j|, \end{cases}$$

$$\sin u_j = \frac{z}{\sin i \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

В результате имеем две пары значений $\Omega_j, u_j, j=1,2$.

7. Выбор пары $\Omega_j, u_j, j=1,2$ выполняется из условия минимума $|\mathbf{V}_{cj} - \mathbf{V}_{tr}|$, где $\mathbf{V}_{cj}$ – вектор скорости на околокруговой орбите с наклонением i_{fg} и долготой восходящего узла Ω_j , вычисляемый по формуле:

$$\mathbf{V}_{cj} = \sqrt{\frac{\mu_E}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}} \begin{pmatrix} -\sin u_j \cos \Omega_j + \cos u_j \sin \Omega_j \cos i_{fg} \\ -\sin u_j \sin \Omega_j + \cos u_j \cos \Omega_j \cos i_{fg} \\ \cos u_j \sin i_{fg} \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{V}_{tr} = (\dot{x}_{j2000}, \dot{y}_{j2000}, \dot{z}_{j2000})^T$ – вектор скорости КА в перицентре траектории перелёта.

8. Выбранное таким образом значение u_j – это значение u_t . Соответствующее значение Ω_j используется для определения u_1 . Вначале вычисляется время конца активного участка по формуле:

$$t_{ln} = t_0 + \frac{1}{\omega_E} D_{Ang}(\Omega_j, \Omega_{fg} + S_{t0}),$$

где

- t_0 – время начала текущих суток по шкале времени UTC;
 S_{t_0} – звездное время на момент времени t_0 ;
 Ω_{fg} – долгота восходящего узла в гринвичской СК, фиксированной на момент старта, полученная по заданному в ГСК вектору состояния КА на конец активного участка;
 $D_{Ang}()$ – функция, которая разность углов $\Omega_j - (\Omega_{fg} + S_{t_0})$ приводит к диапазону от $-\pi$ до π .

Далее проверяется условие: если t_{ln} меньше времени перицентра траектории перелёта t более чем на одни сутки, t_{ln} сдвигается на одни сутки вперед. Если оказалось, что $t_{ln} > t$, t_{ln} сдвигается на одни сутки назад. После этого по вектору $\mathbf{x}_g$ с помощью матрицы $\mathbf{A}_{j2000}^{rot}$ вычисляется вектор состояния КА в СК J2000 на момент времени t_{ln} , элементы орбиты и аргумент широты u_t на время перицентра траектории перелёта t . При сканировании интервала времени заданных суток с шагом 30 сек (цикл, в котором происходят вычисления 5-8) определяется момент времени t , при котором выполняется $|u_t - u_l| < 1^\circ$. Если условие выполнено, выполняется расчёт пунктов 8,9,10,11.

9. По найденному таким образом моменту времени t перехода на траекторию перелёта определяется поправка к времени старта. Для этого на момент времени t по кеплеровым элементам вычисляется вектор состояния КА на орбите выведения: $(x_{ins}, y_{ins}, z_{ins}, \dot{x}_{ins}, \dot{y}_{ins}, \dot{z}_{ins})$ в СК J2000. Поправка Δt_{ln} вычисляется по формуле:

$$\Delta t_{ln} = \frac{1}{3} \left(\frac{x_{j2000} - x_{ins}}{\dot{x}_{ins}} + \frac{y_{j2000} - y_{ins}}{\dot{y}_{ins}} + \frac{z_{j2000} - z_{ins}}{\dot{z}_{ins}} \right)$$

Эта поправка вычитается из t_{ln} .

10. Найденный вектор состояния задается как вектор, переведённый из фиксированной гринвичской СК в СК J2000 на уточненный момент времени перехода на траекторию перелёта: $\mathbf{x}_{j2000ln} = \mathbf{A}_{GRH}^{j2000} \cdot \mathbf{x}_g$

По полученному вектору состояния рассчитываются элементы орбиты перелёта, в частности, аргумент широты u_{ln} . Находится разность между полученным аргументом широты и u_j . Рассчитывается оценка импульса перехода на траекторию перелёта в окрестность точки L_2 :

$$\Delta V = \sqrt{\left(\dot{x}_{j2000\ln} - \dot{x}_{ins}\right)^2 + \left(\dot{y}_{j2000\ln} - \dot{y}_{ins}\right)^2 + \left(\dot{z}_{j2000\ln} - \dot{z}_{ins}\right)^2}$$

11. Выполняется сравнение временного интервала между выходом на орбиту выведения и переходом на траекторию перелёта для полученного на данном шаге варианта, в результате работы цикла по моментам перехода на траекторию перелёта выбирается вариант решения (содержит значения $t_{\ln}, t - t_{\ln}, \mathbf{x}_0, \Delta V, i_{j2000}, \omega_{j2000}, \Omega_{j2000}, \mathbf{A}_{j2000}^{rot}$) с минимальным интервалом. Данный расчёт завершает тело цикла по моментам перехода на траекторию перелёта.
12. После завершения цикла по моментам перехода на траекторию перелёта выполняется проверка на наличие решения. Если оно найдено, выполняется расчёт вектора состояния КА на орбите перелёта $\mathbf{x}_{j2000tr}$ на момент перицентра в СК J2000 по исходному вектору орбиты перелёта $\mathbf{x}_0$ (получен на шаге 2) с помощью матрицы перехода из гринвичской фиксированной СК в СК J2000, рассчитанной на заданную дату:

$$\mathbf{x}_{j2000tr} = \left(\mathbf{A}_{j2000}^{rot}\right)^T \cdot \mathbf{x}_0.$$

Затем по полученному вектору $\mathbf{x}_{j2000tr}$ рассчитываются элементы орбиты выведения, в том числе $i_{j2000}, \Omega_{j2000}, \omega_{j2000}$. Наклонение полученной орбиты сравнивается с эталонным i_{nom} (принято равным распространённому наклонению орбиты выведения для космодрома Байконур – 51.4°). Если отличие составляет менее 0.5° , наклонение орбиты перелёта принимается равным эталонному, в противном случае решение полагается не найденным.

Вектор состояния КА в перицентре перелётной траектории во вращающейся геоцентрической СК, являющийся выходной информацией алгоритма расчёта начального приближения траектории перелёта на квазипериодическую орбиту, рассчитывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{rottr} &= \mathbf{A}_{j2000}^{rot} \cdot \mathbf{x}_{j2000tr} \\ \mathbf{x}_{j2000tr} &= \left(\mathbf{r}_{j2000tr}, \mathbf{v}_{j2000tr}\right)^T \\ \mathbf{r}_{j2000tr} &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{r}_{0\pi} \\ \mathbf{v}_{j2000tr} &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}_{0\pi} \\ r_{0\pi} &= \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \\ v_{0\pi} &= \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= (P_x, P_y, P_z)^T \\
\mathbf{Q} &= (Q_x, Q_y, Q_z)^T \\
P_x &= \cos \omega_{j2000} \cos \Omega_{j2000} - \sin \omega_{j2000} \sin \Omega_{j2000} \cos i_{nom}, \\
P_y &= \cos \omega_{j2000} \sin \Omega_{j2000} + \sin \omega_{j2000} \cos \Omega_{j2000} \cos i_{nom}, \\
P_z &= \sin \omega_{j2000} \sin i_{nom}, \\
Q_x &= -\sin \omega_{j2000} \cos \Omega_{j2000} - \cos \omega_{j2000} \sin \Omega_{j2000} \cos i_{nom}, \\
Q_y &= -\sin \omega_{j2000} \sin \Omega_{j2000} + \cos \omega_{j2000} \cos \Omega_{j2000} \cos i_{nom}, \\
Q_z &= \cos \omega_{j2000} \sin i_{nom},
\end{aligned}$$

В результате работы алгоритма по каждой точке изолинии на заданную дату строится начальное приближение, обеспечивающее одноимпульсный переход с орбиты выведения на траекторию перелёта на квазипериодическую с сохранением наклона орбиты выведения. Расчёт учитывает суточное вращение Земли, решение находится в рамках ограниченной задачи трёх тел.

В таблице 2.7 приведен пример работы алгоритма для $\theta_A = 0.2, \theta_B = 0.85$ (точки изолиний, поданные на вход алгоритма, содержатся в таблице 2.3), даты начала перелёта 06.07.2019 и вектора состояния КА в ПСК на конец активного участка с компонентами:

$$\begin{aligned}
x_g &= 0.346790, \quad y_g = 4.121933, \quad z_g = 5.100238 \text{ в тыс. км,} \\
\dot{x}_{xg} &= -7.446160, \quad \dot{y}_{yg} = -0.403160, \quad \dot{z}_{zg} = 0.832218 \text{ в км/с.}
\end{aligned}$$

Коэффициент солнечного давления составляет $0.025 \frac{\text{м}^3}{\text{с}^2 \cdot \text{кгс}}$.

Таблица 2.7 содержит следующие столбцы:

$\Delta t_{\text{in}}, \text{hms_ln}$	– дата и время конца активного участка: ггггммдд, ччммсс.ddd ДМВ;
t_{trf}	– смещение относительно Δt_{in} и hms_ln , определяющее момент перехода на траекторию перелёта, в т. сек;
x, y, z	– координаты КА в перицентре орбиты перелёта в СК J2000
V_x, V_y, V_z	– компоненты вектора скорости КА в перицентре траектории перелёта во вращающейся барицентрической СК
ΔV	– оценка импульса перехода с орбиты выведения на траекторию перелёта, км/с;
i	– наклонение траектории перелёта, град;
Ω	– долгота восходящего узла траектории перелёта;
ω	– аргумент перицентра траектории перелёта
θ_A, θ_B	– значения параметров θ_A и θ_B ;
φ_1, φ_2	– значения параметров φ_1, φ_2 , определяющих точку изолинии, град.

Таблица 2.7 Варианты начального приближения для траектории перелёта на 06.07.2019 (файл приведен полностью)

Δt_{in}	hms_ln	t_{off}	x	y	z	V_x	V_y	V_z	ΔV	i	Ω	ω	θ_A	θ_B	φ_1	φ_2
06.07.2019	15:39:51.997	3788.003	5154551.974	737308.2442	-4181464.693	4946.6587	6492.8421	7242.6859	3136.049874	51.4	121.678	-21.556	0.2	0.85	2.637152069	-0.668732772
06.07.2019	16:50:59.604	3720.396	4638558.193	2339663.16	-4196041.963	3402.5598	6988.5704	7658.1390	3137.285991	51.4	139.628	-25.964	0.2	0.85	2.150594249	-0.555716907
06.07.2019	02:34:38.708	1911.292	4161662.335	2664261.411	-4492150.496	-8117.8745	6195.8559	-3845.9247	3143.222312	51.4	-75.422	-148.109	0.2	0.85	2.03676963	-0.677082991
06.07.2019	15:39:44.839	3795.161	5149175.57	744005.6522	-4186913.551	4946.3849	6498.3443	7237.9352	3138.753495	51.4	121.795	-21.647	0.2	0.85	2.638616167	-0.669339315
06.07.2019	16:50:31.886	3718.114	4657370.912	2315640.01	-4188568.902	3423.2974	6974.0921	7662.0567	3136.397186	51.4	139.248	-25.763	0.2	0.85	2.153018524	-0.555780708
06.07.2019	16:50:18.697	3731.303	4666167.57	2304212.491	-4185094.458	3433.1211	6967.3299	7663.8000	3137.406015	51.4	139.069	-25.669	0.2	0.85	2.154177803	-0.55581587
06.07.2019	16:50:44.055	3735.945	4649218.869	2326144.386	-4191818.492	3414.2537	6980.3541	7660.3804	3139.745095	51.4	139.413	-25.85	0.2	0.85	2.151957184	-0.555750975
07.07.2019	01:29:18.665	1841.335	4861909.996	632251.6344	-4534251.804	-5730.6887	7788.4451	-5058.7917	3142.744535	51.4	-90.568	-153.254	0.2	0.85	2.692408698	-0.826981371
06.07.2019	15:40:01.253	3778.747	5161225.874	728937.0902	-4174702.554	4947.0040	6486.0198	7248.5417	3136.581645	51.4	121.531	-21.443	0.2	0.85	2.63527804	-0.667963315
06.07.2019	16:51:17.204	3732.796	4626430.273	2354971.445	-4200969.788	3389.2784	6997.9215	7655.4146	3141.193144	51.4	139.872	-26.094	0.2	0.85	2.149060869	-0.555682698

Глава 3

Построение траектории перелёта на квазипериодическую орбиту в рамках полной эфемеридной модели Солнечной системы

3.1. Эфемеридная модель Солнечной системы

В Баллистическом центре (БЦ) ИПМ им. М.В. Келдыша разработана и используется численная модель движения КА, позволяющая вычислять траектории движения КА с учетом возмущений, вызванных гравитационным воздействием Солнца и планет Солнечной системы, Луны, нецентральностью гравитационного поля Земли, силами светового давления, а так же воздействием атмосферы Земли.

Траектория движения КА определяется с помощью интегрирования уравнений движения КА с учетом описанных выше возмущений. В основу алгоритма численного интегрирования уравнений движения положен синтез метода Адамса [Степаньянц, 2000], адаптированного для неравноотстоящих узлов, и неявного метода Рунге-Кутты. Это многошаговый девятистадийный предиктор-корректор.

Для вычисления координат Земли, Луны, Солнца, Меркурия, Венеры, Марса, Юпитера и Сатурна (Нептун, Плутон и Уран оказывают незначительное влияние на движение в окрестности коллинеарных точек либрации системы Солнце-Земля) использовались таблицы эфемерид DE423, разработанные в JPL NASA [Folkner, 2009]. Таблицы эфемерид представлены в форме коэффициентов при полиномах Чебышева. Интервал эфемерид разделен на порции, каждая из которых покрывает 32 суток и содержит трёхмерные векторы-коэффициенты полиномиального представления прямоугольных координат (скорости и ускорения определяются путем дифференцирования координат) упомянутых небесных тел. Полиномы аппроксимируют координаты гелиоцентрического положения центров масс системы Земля-Луна и планет в системе координат, связанной со средним равноденствием и экватором эпохи J2000. Координаты Луны в DE423 представлены в геоцентрической системе координат.

В прямоугольной инерциальной геоцентрической системе координат J2000 уравнения движения КА записываются в форме

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu_3 \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \mathbf{f}_{\text{сол}} + \mathbf{f}_{\text{лун}} + \mathbf{f}_{\text{мер}} + \mathbf{f}_{\text{мар}} + \mathbf{f}_{\text{вен}} + \mathbf{f}_{\text{юп}} + \mathbf{f}_{\text{сат}} + \mathbf{A}_3^{J2000} (\mathbf{f}_3^{\text{грав}} + \mathbf{f}_{\text{атм}}) + \mathbf{f}_{\text{рад}}, \quad (3.1)$$

где $\mathbf{r}$ – координаты КА в СК J2000, $\mathbf{v}$ – вектор скорости КА в СК J2000, μ_3 – гравитационная постоянная Земли, $\mathbf{f}_{\text{сол}}, \mathbf{f}_{\text{лун}}, \mathbf{f}_{\text{мер}}, \mathbf{f}_{\text{мар}}, \mathbf{f}_{\text{вен}}, \mathbf{f}_{\text{юп}}, \mathbf{f}_{\text{сат}}$ – векторы возмущающих ускорений, вызванные центральными частями гравитационных полей Солнца, Луны, Меркурия, Марса, Венеры, Юпитера и Сатурна в СК J2000, $\mathbf{A}_3^{\text{J2000}}$ – матрица перехода из гринвичской вращающейся СК в СК J2000, $\mathbf{f}_3^{\text{грав}}$ – вектор возмущающих ускорений, вызванный влиянием нецентральности гравитационного поля Земли в гринвичской вращающейся СК, $\mathbf{f}_{\text{атм}}$ – вектор возмущающих ускорений, вызванный влиянием атмосферы Земли, $\mathbf{f}_{\text{рад}}$ – вектор возмущений от давления сил солнечной радиации.

Для расчёта $\mathbf{f}_{\text{сол}}, \mathbf{f}_{\text{лун}}, \mathbf{f}_{\text{мер}}, \mathbf{f}_{\text{мар}}, \mathbf{f}_{\text{вен}}, \mathbf{f}_{\text{юп}}, \mathbf{f}_{\text{сат}}$, входящих в (3.1), используются следующие соотношения:

$$\mathbf{f}_i = \mu_i \left(\frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|^3} \right),$$

где индекс i обозначает каждое из перечисленных небесных тел, μ_i – гравитационные постоянные, а $\mathbf{r}_i$ – положения планет в геоцентрической СК J2000. Для учёта нецентральности гравитационного поля Земли при полёте в её сфере действия используется отечественное разложение ПЗ90.02 [Галазин, 1998] гравитационного поля по сферическим функциям. Силовая функция нецентрального гравитационного поля небесного тела, выраженная в виде разложения по сферическим функциям, имеет вид:

$$U = \frac{\mu}{r} \left[\sum_{n=2}^{\infty} c_{n0} \left(\frac{R}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^n (c_{nm} \cos m\lambda + s_{nm} \sin m\lambda) P_n^m(\sin \varphi) \right],$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – радиус-вектор точки с прямоугольными координатами x, y, z , во вращающейся СК, связанной с фигурой Земли, λ, φ – долгота и широта этой точки, μ – гравитационная постоянная планеты Земли, R – экваториальный радиус Земли или Луны, c_{n0} – коэффициенты при зональных гармониках, c_{nm}, s_{nm} – ненормированные коэффициенты при тессеральных и секториальных гармониках, $P_n(\sin \varphi)$ – полиномы Лежандра, $P_n^m(\sin \varphi)$ – присоединенные функции Лежандра.

В настоящее время распространены модели гравитационного поля с конечным количеством учитываемых сферических функций, где N – порядок, а M – степень. Возмущающая функция с конечным числом гармоник принимает вид:

$$U_{NM} = \frac{\mu}{r} \left[\sum_{n=2}^N c_{n0} \left(\frac{R}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^M \left(\frac{R}{r} \right)^n (c_{nm} \cos m\lambda + s_{nm} \sin m\lambda) P_n^m(\sin \varphi) \right].$$

Для расчёта вектора возмущающих ускорений на траектории перелёта $\mathbf{f}_{\text{атм}}$, вызванных влиянием атмосферы Земли, используется следующее соотношение:

$$\mathbf{f}_{\text{атм}} = -\mathbf{v} \frac{\rho \cdot S_6 \cdot |\mathbf{v}|}{g},$$

где ρ – плотность атмосферы Земли в точке нахождения КА, g – ускорение силы тяжести на поверхности Земли, S_6 – баллистический коэффициент в принятой для БЦ

ИПМ размерности: $\frac{\text{м}^3}{\text{с}^2 \cdot \text{кгс}}$.

Расчёт плотности атмосферы ρ производится по модели ГОСТ Р 25645.000-2001, которая используют в качестве входных данных три индекса солнечной активности: индекс $F_{10.7}$ солнечной активности, равный плотности потока радиоизлучения Солнца на волне длиной 10.7 см, $\frac{10^{-22} \text{ Вт}}{\text{м}^2 \text{ Гц}}$; индекс F_{81} или средне-взвешенное значение $F_{10.7}$ за 81 сутки, $\frac{10^{-22} \text{ Вт}}{\text{м}^2 \text{ Гц}}$; квазилогарифмический, планетарный среднесуточный индекс K_p геомагнитной активности. В БЦ ИПМ ежедневно накапливаются индексы солнечной активности из открытых источников наблюдения за Солнцем и строится прогноз на 27 суток. Для проведения расчётов при моделировании полёта КА «Спектр-РГ» и «Спектр-М» использовались средние значения этих индексов.

Для расчёта матрицы $\mathbf{A}_3^{J2000}$ [3x3] используется модель вращения Земли IAU2000A International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS) [IERS Convention, 2003], [Folkner, 2009].

Сила $\mathbf{F}_{\text{рад}}$ давления солнечной радиации на расстоянии астрономической единицы $a_e = 149597870691$ м на идеально отражающую поверхность площадью 1 м^2 , расположенную ортогонально направлению на Солнце, составляет $9.1 \cdot 10^{-6}$ Па. Для полностью поглощающей поверхности эта сила приблизительно равна $4.5 \cdot 10^{-6}$ Па. В общем случае F_c можно выразить формулой:

$$\mathbf{F}_{\text{рад}} = c_r \cdot 4.5 \cdot 10^{-6} \quad (3.2)$$

где c_r – коэффициент отражения, зависящий от свойств поверхности. Значение $c_r = 1$ соответствует полному поглощению излучения, $c_r = 2$ – его полному отражению.

Ускорение тела площадью S и массой m , вызванное силой $\mathbf{f}_{\text{рад}}$, определяется по формуле:

$$\mathbf{f}_{\text{рад}} = F \frac{S}{m} a_e^2 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_c}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_c|^3}. \quad (3.3)$$

В отечественной практике принято использовать коэффициент давления солнечной радиации σ , выраженный в долях массы Солнца. Дополнительное ускорение, вызванное давлением солнечной радиации, выражается формулой

$$\mathbf{f}_{\text{рад}} = \sigma \cdot \mu_c \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_c}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_c|^3}. \quad (3.4)$$

Из соотношений (3.2), (3.3) и (3.4) получаем:

$$\sigma = c_r \cdot 4.5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{\mu_c} \frac{S}{m} a_e^2 \approx c_r \cdot 767 \cdot 10^{-6} \frac{S}{m}.$$

Для КА массой 2000 кг и площадью 10 м² со средним значением $c_r = 1.35$ получаем $\sigma = 5.18 \cdot 10^{-6}$. Отметим, что для давления сил солнечной радиации необходимо учитывать положение КА в тени. Для этого определяется функция тени:

$$\chi = \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{r}_c)}{|\mathbf{r}_c|}.$$

Учёт давления сил солнечной радиации производится при положительном значении χ .

3.2. Построение траектории перелёта с низкой околоземной орбиты на квазипериодическую орбиту в окрестности точки L_2 по начальному приближению в рамках эфемеридной модели Солнечной системы

Описанный в данном разделе алгоритм позволяет решить задачу построения одноимпульсной траектории перелёта на квазипериодическую орбиту в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце-Земля в рамках модели, описанной в разделе 3.1, на основе начального приближения для траектории перелёта, полученного в рамках задачи трёх тел в разделе 2.3.2. Моделирование движения КА осуществляется с помощью численного интегрирования уравнений движения, учитывающих гравитационные поля планет Солнечной системы, нецентральность поля Земли, влияние атмосферы Земли, влияние давления солнечной радиации на КА. Стандартные баллистические расчёты (расчёт положения небесных тел на заданный момент времени по ежегоднику, интегрирование уравнений движения КА, расчёт матриц преобразования вектора состояния в стандартные системы координат), выполняются с помощью разработанного в ИПМ программного комплекса ESTK (Earth Space Tool Kit). Для работы с временем и датой используется

международная шкала UTC. Для перехода к эфемеридному времени используется стандартная функция библиотеки ESTK.

Входной информацией алгоритма служит начальное приближение, полученное на этапе, описанном в разделе 2.3.2:

t_{in}	–	дата и время конца активного участка
t_{sh}	–	смещение относительно t_{in} , определяющее момент перехода на траекторию перелёта, в т. сек;
x, y, z	–	координаты КА в перицентре орбиты перелёта в СК J2000, компоненты вектора
V_x, V_y, V_z	–	компоненты вектора скорости КА в перицентре траектории перелёта в барицентрической СК
ΔV	–	оценка импульса перехода с орбиты выведения на траекторию перелёта, км/с;
i ,	–	наклонение траектории перелёта, град;
Ω	–	долгота восходящего узла траектории перелёта;
ω	–	аргумент перицентра траектории перелёта
θ_A, θ_B	–	значения безразмерных параметров θ_A и θ_B ;
φ_1, φ_2	–	значения параметров φ_1, φ_2 , определяющих точку изолинии, град.
– вектор состояния орбиты выведения $\mathbf{x}_g$, записанный в гринвичской вращающейся СК		
– радиус окрестности точки L_2 D_{L_2} , в пределах которой должна лежать квазипериодическая орбита		

Выходной информацией алгоритма является

- уточненный вектор начальных условий орбиты перелёта $\mathbf{x}_{ins}^I$
- начальные условия (вектор состояния $\mathbf{x}_{trf_final}$ и время t_{trf}) в перицентре орбиты перелёта в окрестность точки L_2
- вектора состояния КА с заданным шагом по времени на траектории перелёта и после выхода на квазипериодическую орбиту до момента выхода из заданной окрестности точки L_2 .

Алгоритм расчёта параметров траектории перелёта на квазипериодическую орбиту по начальному приближению из условия максимального времени пребывания в заданной окрестности точки L_2 состоит из следующих этапов.

1. Уточняется время конца активного участка выведения на низкую околоземную орбиту.

- а. Производится расчёт по начальному приближению вектора состояния $\mathbf{x}_{trf}^{j2000}$ на момент перехода на траекторию перелёта к точке L_2 : по входному вектору состояния $\mathbf{x}_0(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$ и матрице $\mathbf{A}_{j2000}^{rot}$ перехода во вращающуюся геоцентрическую систему координат из СК J2000, построенной на момент перехода на траекторию перелёта ($t_{trf} = t_{ln} + t_{sh}$) в окрестность точки L_2 , рассчитывается вектор состояния $\mathbf{x}_{trf}^{j2000} = (\mathbf{A}_{j2000}^{rot})^T \cdot \mathbf{x}_0$. Расчёт матрицы $\mathbf{A}_{j2000}^{rot}$ перехода из СК J2000 во вращающуюся геоцентрическую систему координат выполняется с помощью выражений (2.13) по элементам гелиоцентрической орбиты Земли, рассчитанным на момент t_{trf} (алгоритм изложен в разделе 2.3.2).
- б. По вектору $\mathbf{x}_{trf}^{j2000}$ выполняется расчёт кеплеровых элементов орбиты КА в СК J2000 на момент перехода на траекторию перелёта.
- в. Уточняется момент времени t_{ln} . Для этого выполняются следующие действия.

– Вычисляется невязка между положениями КА на орбите выведения и на орбите перелёта. Расчёт производится следующим образом: в СК J2000 выполняется численное интегрирование уравнений движения КА, начальное положение задается вектором состояния $\mathbf{x}_g$ на время t_{ln} , конечное положение определяется временем t_{trf} . Вычисляется невязка

$$\mathbf{dp} = \mathbf{x}_{j2000} - \mathbf{x}_{ins}$$

$$\|\mathbf{dp}\| = \sqrt{dp_x^2 + dp_y^2 + dp_z^2},$$

где $\mathbf{x}_{ins}$ - вектор $\mathbf{x}_g$, проинтегрированный на время t_{trf}

- Запускается цикл вариации времени конца активного участка t_{ln} с шагом 1 секунда в интервале $[-10с; +10с]$. На каждом шаге выполняется расчёт, аналогичный предыдущему пункту. Таким образом по минимальному значению невязки $\|\mathbf{dp}\|$ находится уточненное время t_{ln} и $\mathbf{x}_{ins}$ с точностью до 1 секунды.
- Более точное значение времени конца активного участка t_{ln} находится с помощью метода бисекции в рамках интервала $[-1с; +1с]$. Расчёт невязки по положению также выполняется вышеописанным способом.

Найденные начальные условия орбиты выведения на момент конца активного участка преобразуются из СК J2000 в гринвичскую фиксированную на момент конца активного участка СК:

$$\mathbf{x}_{ins}^{GRH} = (\mathbf{A}_{GRH}^{J2000})^T \cdot \mathbf{x}_{ins}.$$

Затем полученный вектор преобразуется в гринвичскую вращающуюся СК:

$$\begin{aligned} x_{ins}^I &= x_{ins}^{GRH} & \dot{x}_{ins}^I &= \dot{x}_{ins}^{GRH} - y_{ins}^{GRH} \omega_3 \\ y_{ins}^I &= y_{ins}^{GRH} & \dot{y}_{ins}^I &= \dot{y}_{ins}^{GRH} + x_{ins}^{GRH} \omega_3, \\ z_{ins}^I &= z_{ins}^{GRH} & \dot{z}_{ins}^I &= \dot{z}_{ins}^{GRH} \end{aligned}$$

где ω_3 - угловая скорость вращения Земли – получаем уточненный вектор состояния орбиты выведения на уточненное время конца активного участка $\mathbf{x}_{ins}^I$.

2. В данном пункте происходит формирование начального приближения вектора состояния в перицентре орбиты перелёта. Положение определяется по факту приведения при полете по орбите выведения. Скорость вычисляется по условию достижения окрестности точки L_2 и максимизации времени нахождения в ней. Максимум ищется градиентным методом. В качестве исходного вектора для данной части алгоритма используется вектор $\mathbf{x}_{trf}^{j2000}$, рассчитанный в пункте 1. Выполняется итерационный цикл, завершающийся при соблюдении двух условий – модуль поправки к вектору скорости, рассчитанный на очередном шаге, должен быть меньше или равен 0.001 м/с и должно быть выполнено не менее 100 итераций. Итерационный цикл состоит в выполнении следующих шагов.

- а. По входящим значениям $\mathbf{x}_{trf}^{j2000}$, t_{trf} и значению радиуса окрестности точки L_2 D_{L_2} (принято равным 1200000 км) происходит определение моментов t_{in} входа в окрестность точки L_2 и t_{out} выхода из неё. Рассчитывается значение $T_1 = t_{out} - t_{in}$

– Вход ищется с помощью численного интегрирования уравнений движения КА на заданный момент времени t_{in} (начальные условия -

$$\mathbf{x}_{trf}^{j2000} \text{ и } t_{trf})$$

$$t_{in} = t_{trf} + s_{in}$$

$$s_{in \max} = N_{days \text{ in max}} \cdot 86400$$

Расчёт текущего положения точки L_2 выполняется на каждом шаге. Считается, что вход в окрестность точки L_2 найден, если расстояние r_{in} до точки L_2 в момент t_{in} подчиняется следующему соотношению:

$$r_{in} \leq D_{L_2}$$

$$r_{in} = \sqrt{x_{in}^2 + y_{in}^2 + z_{in}^2}$$

Выполняется цикл по значениям $s_{in} \in [0; s_{in \max}]$ с заданным шагом h_s (принят равным 3 часам, $h_s = 3 \cdot 3600$). Если момент входа найден, выполняется уточнение момента входа с помощью метода бисекции временного отрезка h_s до достижения заданной точности по положению точки входа.

– Выход из окрестности точки либрации ищется аналогичным образом – выполняется численное интегрирование уравнений движения КА от найденного момента времени t_{in} до момента времени t_{out} , заданного следующим образом:

$$t_{out} = t_{in} + s_{out}$$

$$s_{out \max} = N_{days \ out \ max} \cdot 86400$$

Выполняется цикл по значениям $s_{out} \in [0; s_{out \max}]$ с заданным шагом h_s . Если момент выхода найден, выполняется уточнение момента выхода с помощью метода бисекции временного отрезка h_s до достижения заданной точности по положению точки выхода, затем цикл прерывается.

Значения $N_{days \ in \ max}$ и $N_{days \ out \ max}$ были приняты равными 30 и 800 суткам соответственно.

Если моменты входа или выхода не найдены, происходит выход из цикла формирования начальных условий орбиты перелёта

б. По входящим значениям $\mathbf{x}_{trf}^{j2000}$, t_{trf} и значению радиуса окрестности точки L_2 D_{L_2} происходит вычисление производных от времени пребывания в окрестности L_2 по компонентам вектора скорости.

– Время пребывания в окрестности точки L_2 до вариации вектора скорости рассчитывается вышеописанным методом: $T = t_{out} - t_{in}$

– В цикле по компонентам вектора скорости происходит их вариация: $v_i = v_i + \Delta V$, $i=1,2,3$ (значение вариации скорости ΔV принято равным 1 м/с). Для каждой вариации рассчитывается значение T_i . Если выход из окрестности точки L_2 после вариации компоненты скорости не был найден, $T_i = N_{days\ out\ max} \cdot 86400$, если же не был найден вход $T_i = 0$. Таким образом получаем вектор $\mathbf{T}^+ = (T_{vx}^+, T_{vy}^+, T_{vz}^+)^T$.

– Выполняется расчёт в рамках аналогичного цикла, но вариация отрицательная: $v_i = v_i - \Delta V$. Рассчитывается вектор $\mathbf{T}^- = (T_{vx}^-, T_{vy}^-, T_{vz}^-)^T$

– Выполняется расчёт частных производных от времени пребывания в окрестности точки L_2 по компонентам вектора скорости:

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial v_i} = \frac{1}{2\Delta V} (T_i^+ - T_i^-)$$

$$\nabla \mathbf{T} = \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial v_x}, \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial v_y}, \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial v_z} \right)$$

с. Вычисляется норма градиента функции $\mathbf{T}$:

$$|\nabla \mathbf{T}| = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial v_x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial v_y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial v_z} \right)^2}$$

По заданному значению ΔV_{max} модуля поправки к вектору скорости вычисляются компоненты поправок к вектору скорости:

$$\Delta V_i = \frac{\Delta V_{max}}{|\nabla \mathbf{T}|} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial v_i},$$

где значение ΔV_{max} принято равным 5 м/с

d. Варьируются значения вектора скорости в исходном векторе $\mathbf{x}_{trf}^{j2000}$:

$$V_{vari}^{j2000} = V_i^{j2000} + \Delta V_i$$

$$\mathbf{x}_{var}^{j2000} = (x^{j2000}, y^{j2000}, z^{j2000}, \dot{x}_{var}^{j2000}, \dot{y}_{var}^{j2000}, \dot{z}_{var}^{j2000})$$

По уточненному вектору состояния $\mathbf{x}_{var}^{j2000}$ рассчитывается значение

$$T_2 = t_{out} - t_{in}$$

- е. Если и до тех пор, пока $T_1 \geq T_2$ и норма поправки $\|\Delta V\| > 0$, выполняется цикл сокращения шага – поправка к вектору скорости КА на k -ом шаге рассчитывается следующим образом:

$$(V_{\text{vari}}^{j2000})_k = V_i^{j2000} + \frac{\Delta V_i}{2^k},$$

затем по полученному вектору $\mathbf{x}_{\text{var}}^{j2000}$ рассчитывается новое значение $T_2 = t_{\text{out}} - t_{\text{in}}$.

Если $\|\Delta V\| < 0.01 \text{ м/с}$, а $T_1 \geq T_2$, (найден локальный минимум) то происходит выход из цикла сокращения шага по скорости и переключение на покоординатный спуск.

- ф. Покоординатный спуск по компонентам вектора скорости выполняется следующим образом: находится компонента вектора скорости, вариация по которой на этапе расчёта частных производных дала наибольшее значение T_i^+ при вариации в плюс, и компонента, давшая наибольшее значение T_i^- при вариации в минус. Далее, если $T_i^+ > T_i^-$ и $T_i^+ > T_1$, то соответствующей i -ой компоненте вектора скорости присваивается значение $v_i = v_i + \Delta V$. Если $T_i^+ < T_i^-$ и $T_i^- > T_1$, то соответствующей i -ой компоненте вектора скорости присваивается значение $v_i = v_i - \Delta V$. Если же не выполнено ни то, ни другое условие, то есть найденные значения времени пребывания в окрестности точки L_2 после вариаций больше значения T_1 до вариаций, значит найден локальный минимум при покоординатном спуске.

В результате расчётов, проведенных на данном этапе алгоритма, найден вектор $\mathbf{x}_{\text{var}}^{j2000} = (x^{j2000}, y^{j2000}, z^{j2000}, vx_{\text{var}}^{j2000}, vy_{\text{var}}^{j2000}, vz_{\text{var}}^{j2000})$, обеспечивающий при заданных условиях максимальное время пребывания КА в окрестности точки либрации после перелёта.

3. Вектор начальных условий КА в момент перехода на траекторию перелёта к точке L_2 уточняется по критерию ортогональности вектора скорости плоскости XZ вращающейся СК с центром в точке L_2 в момент её пересечения при движении по квазипериодической орбите в окрестности точки L_2 . Данное условие позволяет увеличить продолжительность нахождения аппарата в заданной окрестности точки

либрации, а также позволяет сформировать квазипериодическую орбиту в окрестности гало-орбиты, а не орбиты Лиссажу.

- а. Формируется время начала поиска пересечения с плоскостью XZ :

$$t_{bf} = t_{urf} + 90 \cdot 86400 - \text{спустя 90 суток после старта с орбиты выведения.}$$

- б. Выполняется цикл вариации значений вектора скорости в момент перехода на траекторию перелёта к точке L_2 с помощью метода Соболя [Соболь, 2006]:

$$\Delta V_i = \Delta V_{\max} \cdot (2q_i - 1)$$

$$V_i^{\text{var}} = (V_{\text{var}}^{j2000})_i + \Delta V_i$$

$$\mathbf{x}_1 = (x, y, z, V_x^{\text{var}}, V_y^{\text{var}}, V_z^{\text{var}})^T$$

Метод Соболя состоит в использовании для случайного поиска LP_r последовательностей, которые являются всюду плотными и наиболее равномерно распределенными среди всех известных на сегодняшний день последовательностей [Соболь, 2006]. Коэффициент q_i рассчитывается с помощью метода Соболя на интервале $[0,1]$.

Цикл по числу вариантов ($N = 10000$) содержит следующие этапы:

- Расчёт методом Соболя коэффициентов q_i .
- Расчёт поправок к вектору скорости ΔV_i с использованием найденных коэффициентов q_i согласно приведенному выше соотношению.
- Определение момента t_{xz} пересечения плоскости XZ вращающейся СК с центром в точке L_2 выполняется согласно следующему алгоритму. В цикле по моментам времени с шагом Δt (принят равным 3 часам) на интервале $[t_{bf}, t_{end}]$, где

$$t_{end} = t_{bf} + N_{\text{days max}} \cdot 86400,$$

выполняется расчёт вектора состояния КА на текущий момент времени с помощью численного интегрирования уравнений движения КА, начальные условия задаются вектором $\mathbf{x}_1$ на время t_{urf} . Выполняется переход во вращающуюся СК с центром в точке L_2 , получаем вектор $\mathbf{x}_1^{\text{rot}}$. Если выполняется условие $y_{i-1}^{\text{rot}} \cdot y_i^{\text{rot}} < 0$, где i – номер итерации, то пересечение плоскости XZ найдено.

Затем выполняется уточнение момента t_{xz} пересечения плоскости XZ методом бисекции временного интервала $[t_{i-1}, t_i]$, где $t_i = t_{i-1} + \Delta t$, i – номер итерации, на которой найдено пересечение траектории КА с плоскостью XZ . В результате работы данной функции находится $\mathbf{x}_1^{rot}$ – вектор состояния КА на момент времени t_{xz} пересечения плоскости XZ вращающейся СК, записанный во вращающейся барицентрической СК.

По вектору $\mathbf{x}_1^{rot}$ рассчитывается модуль скорости в плоскости XZ :

$$V_{xz} = \sqrt{(V_x^{rot})^2 + (V_z^{rot})^2}.$$

Значения V_{xz} , ΔV_i , $i=1,2,3$, $\mathbf{x}_1^{rot}$ записываются в структуру-массив.

Полученная в результате цикла по 10000 вариантов структура-массив сортируется по значению модуля скорости в плоскости XZ V_{xz} .

- с. Итерационный процесс уточнения вектора скорости в перицентре отлётной траектории из условия его ортогональности плоскости орбиты XZ при её пересечении начинается от лучшего найденного на предыдущим шаге варианта – варианта с минимальным значением V_{xz} :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 &= (x_1, y_1, z_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2)^T \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_1 + \Delta V_x \\ \dot{y}_2 &= \dot{y}_1 + \Delta V_y \\ \dot{z}_2 &= \dot{z}_1 + \Delta V_z \end{aligned},$$

где ΔV_i – поправки к вектору скорости, рассчитанные на шаге с минимальным значением V_{xz} .

Выполняется цикл, содержащий следующую последовательность расчётов.

- Расчёт частных производных от модуля проекции скорости на плоскость XZ по компонентам вектора скорости в перицентре отлётной орбиты выполняется с помощью функции, аналогичной вышеописанной функции расчёта частных производных по времени. По входящему вектору $\mathbf{x}_2$ (записан в СК J2000)

вычисляется вектор $\mathbf{x}_2^{rot}$ (записан в СК с центром в точке L_2), затем рассчитывается $V_{xz} = \sqrt{(V_x^{rot})^2 + (V_z^{rot})^2}$.

В цикле по компонентам вектора скорости вектора $\mathbf{x}_2$ происходит их вариация: $v_i = v_i + \Delta V1$ (смысл обозначения 1 у $\Delta V1$ заключается в том, что $\Delta V1 \neq \Delta V \neq \Delta V_i$, значение вариации скорости $\Delta V1$ принято равным 0.001 м/с), $i=1,2,3$. Для каждой вариации рассчитывается значение V_{xz} . Если после вариации компоненты вектора скорости пересечение с плоскостью XZ не найдено, то V_{xz} принимается равным нулю. Таким образом получаем вектор $\mathbf{V}_{xz}^+ = (V_{xz_{vx}}^+, V_{xz_{vy}}^+, V_{xz_{vz}}^+)^T$.

Выполняется расчёт в рамках аналогичного цикла, но вариация отрицательная: $v_i = v_i - \Delta V1$. Рассчитывается вектор $\mathbf{V}_{xz}^- = (V_{xz_{vx}}^-, V_{xz_{vy}}^-, V_{xz_{vz}}^-)^T$

Выполняется расчёт частных производных от модуля скорости в плоскости XZ в момент её пересечения по компонентам вектора скорости:

$$\frac{\partial \mathbf{V}_{xz}}{\partial v_i} = \frac{1}{2\Delta V1} (V_{xz_i}^+ - V_{xz_i}^-)$$

$$\nabla \mathbf{V}_{xz} = \left(\frac{\partial \mathbf{V}_{xz}}{\partial v_x}, \frac{\partial \mathbf{V}_{xz}}{\partial v_y}, \frac{\partial \mathbf{V}_{xz}}{\partial v_z} \right)$$

– Вычисляется значение нормы градиента функции V_{xz}

$$|\nabla \mathbf{V}_{xz}| = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{V}_{xz}}{\partial v_x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{V}_{xz}}{\partial v_y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{V}_{xz}}{\partial v_z} \right)^2}$$

По заданному значению $|\Delta \mathbf{V}_{xz}|$ модуля поправки к вектору скорости вычисляются компоненты поправок к вектору скорости:

$$\Delta V_i = \frac{\Delta V_{1max}}{|\Delta \mathbf{V}_{xz}|} \frac{\partial \mathbf{V}_{xz}}{\partial v_i},$$

где значение ΔV_{1max} принято равным 0.005 м/с.

– Варьируются значения вектора скорости в исходном векторе $\mathbf{x}_2$

$$\begin{aligned}(V_2^{\text{var}})_i &= (V_2)_i - \Delta V_i \\ \mathbf{x}_2^{\text{var}} &= (x_2, y_2, z_2, \dot{x}_2^{\text{var}}, \dot{y}_2^{\text{var}}, \dot{z}_2^{\text{var}})\end{aligned}$$

По вектору $\mathbf{x}_2^{\text{var}}$ рассчитывается значение V_{xz}^C - модуль скорости в плоскости XZ после вариации вектора скорости в перицентре отлетной траектории. Если и до тех пор, пока $V_{xz} < V_{xz}^C$ и норма поправки к вектору скорости $\|\Delta V\| > 0$, выполняется цикл сокращения шага – поправка к вектору скорости КА на k -ом шаге рассчитывается следующим образом:

$$(V_2^{\text{var}i})_k = V_2^i - \frac{\Delta V_i}{2^k},$$

затем по полученному вектору $\mathbf{x}_2^{\text{var}}$ рассчитывается новое значение V_{xz}^C . Если $\|\Delta V\| < 0.00001$ м/с, а $V_{xz} \leq V_{xz}^C$ (найден локальный минимум), то происходит выход из цикла сокращения шага по скорости и переключение на покоординатный спуск.

Покоординатный спуск по компонентам вектора скорости выполняется следующим образом: находится компонента вектора скорости, вариация по которой на этапе расчёта частных производных дала наибольшее значение $V_{xz_i}^+$ при вариации в плюс, и компонента, давшая наибольшее значение $V_{xz_i}^-$ при вариации в минус. Далее, если $V_{xz_i}^+ > V_{xz_i}^-$ и $V_{xz_i}^+ > V_{xz}$, то соответствующей i -ой компоненте вектора скорости присваивается значение $v_i = v_i - \Delta V_i$. Если $V_{xz_i}^+ < V_{xz_i}^-$ и $V_{xz_i}^- > V_{xz}$ то соответствующей i -ой компоненте вектора скорости присваивается значение $v_i = v_i + \Delta V_i$. Если же не выполнено ни то, ни другое условие, то есть найденные значения модуля скорости в плоскости XZ после вариации вектора скорости в перицентре отлетной траектории больше значения V_{xz} до вариаций, значит найден локальный минимум при покоординатном спуске.

Цикл завершается при выполнении двух условий: норма поправки к вектору скорости $\|\Delta V\| < 0.00001$ м/с и число итераций $N_{\text{iter}} > 100$. В

результате работы цикла получаем уточненный вектор $\mathbf{x}_2^{\text{var}}$, обозначим его

$$\mathbf{x}_{trf_final}.$$

4. Импульс перехода с орбиты выведения на траекторию перелёта рассчитывается следующим образом: $\Delta V_{trf}^i = V_{trf_final}^i - V_{ins}^i$, где $V_{trf_final}^i$ - компоненты вектора скорости вектора $\mathbf{x}_{trf_final}$ КА в перицентре траектории перелёта в окрестность точки L_2 , прошедшего все этапы уточнения, а V_{ins}^i - компоненты вектора скорости вектора $\mathbf{x}_{ins}$ - уточненного вектора орбиты выведения на момент конца активного участка. Полученный вектор начальных условий орбиты перелёта в момент старта с низкой околоземной орбиты сохраняется. По вектору $\mathbf{x}_{trf_final}$ производится контрольный расчёт модуля вектора скорости в плоскости XZ при её пересечении в окрестности точки L_2 , а так же контрольный расчёт времени пребывания в окрестности точки L_2 после её достижения.

Затем выполняется подготовка результатов расчёта для формирования отчётной информации о траектории перелёта. В частности, по вектору орбиты выведения $\mathbf{x}_{ins}$ рассчитываются кеплеровы элементы геоцентрической орбиты выведения, по вектору $\mathbf{x}_{trf_final}$ - кеплеровы элементы геоцентрической орбиты перелёта в окрестность точки L_2 . Эти данные, уточнённое время конца активного участка t_{ins} , время перехода на траекторию перелёта t_{trf} , импульс перехода на траекторию перелёта $\Delta \vec{V}_{trf}$ и вектор состояния орбиты перелёта $\mathbf{x}_{trf_final}$, записанный в СК J2000, впоследствии записываются в отчетный файл формата html. На этом алгоритм расчёта параметров траектории перелёта на квазипериодическую орбиту по начальному приближению из условия максимального времени пребывания в этой окрестности завершается.

Следующим этапом является расчёт траектории перелёта по полученным начальным условиям. Расчёт выполняется с помощью численного интегрирования уравнений движения КА, начальными условиями КА является вектор $\mathbf{x}_{trf_final}$ на момент t_{trf} . Численное интегрирование уравнений движения КА выполняется с заданным интервалом по времени на заданное число интервалов (в тестовом расчёте $h_s = 43200$ сек (12 часов), $N_{steps} = 200$ – траектория рассчитывается на 100 суток с момента старта КА).

$$\begin{aligned} t_0 &= t_{trf} \\ t_i &= t_{i-1} + h_s \\ i &= [1, N_{steps}] \end{aligned}$$

Численное интегрирование уравнений движения выполняется на каждый момент времени t_i , то есть на каждом шаге рассчитывается $\mathbf{x}_i$ в СК J2000, по нему с помощью элементов гелиоцентрической орбиты Земли, рассчитанных с использованием ежегодника и стандартных функций библиотеки ESTK, и матрицы перехода $\mathbf{A}_{J2000}^{rot}$ вычисляется вектор состояния КА $\mathbf{x}_i^{rot}$ в геоцентрической вращающейся СК, фиксированной на текущий момент времени t_i . В каждый момент времени также рассчитывается расстояние до точки L_2 : $r_{L_2} = \sqrt{(x_i^{rot} + r_{L_2})^2 + (y_i^{rot})^2 + (z_i^{rot})^2}$. Значения $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_i^{rot}$, r_{L_2} на каждом шаге печатаются в файл отчета. На каждом шаге также проверяются условия входа в окрестность точки либрации: если $\frac{\|\mathbf{x}_i^{rot}\|}{r_L} > \theta$, где $r_L = 1501531772$ м, $\theta = \frac{17}{24}$, и вход еще не был найден, то траектория КА вошла в окрестность точки L_2 . Если вход был найден, то по вектору $\mathbf{x}_i^{rot}$ производится расчёт параметров $A, B, C, D, \varphi_1, \varphi_2$ квазипериодической орбиты в окрестности точки либрации согласно приведенным ниже выражениям:

$$\begin{aligned}
 r_{L1} &= a + r_L \\
 \mu' &= \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu}, \\
 B_L &= \left(\frac{1 - \mu'}{r_{L1}^3} + \frac{\mu'}{r_L^3} \right) a^3, \\
 n_1 &= \sqrt{\frac{\mu_1 + \mu}{a^3}} \\
 \omega_1 &= n_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{9B_L^2 - 8B_L} - B_L + 2 \right)} \\
 \omega_2 &= n_1 \cdot \sqrt{B_L}, \\
 \lambda &= n_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{9B_L^2 - 8B_L} + B_L - 2 \right)} \\
 k_1 &= \frac{1}{2(\lambda / n_1)} \left[\left(\frac{\lambda}{n_1} \right)^2 - 2B_L - 1 \right] \\
 k_2 &= \frac{1}{2(\omega_1 / n_1)} \left[\left(\frac{\omega_1}{n_1} \right)^2 + 2B_L + 1 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= x_i^{rot} + r_L, & \dot{\xi}_1 &= \dot{x}_i^{rot} + n_1 y_i^{rot} \\
\xi_2 &= y_i^{rot}, & \dot{\xi}_2 &= \dot{y}_i^{rot} - n_1 x_i^{rot} \\
\xi_3 &= z_i^{rot}, & \dot{\xi}_3 &= \dot{z}_i^{rot}
\end{aligned}$$

$$\varphi_2 = \text{atan} 2 \left(\frac{-\dot{\xi}_3}{\omega_2}, \xi_3 \right)$$

$$B = \sqrt{\xi_3^2 + \frac{\dot{\xi}_3^2}{\omega^2}}$$

$$C_1 = \frac{\dot{\xi}_2 + k_2 \omega_1 \xi_1}{k_2 \omega_1 + k_1 \lambda} \quad (3.5)$$

$$C_2 = \frac{k_2 \dot{\xi}_1 - \omega_1 \xi_2}{k_2 \lambda - \omega_1 k_1}$$

$$C = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)$$

$$D = \frac{1}{2}(C_1 - C_2)$$

$$w_1 = \xi_1 - C_1$$

$$w_2 = \frac{k_1 C_2 - \xi_2}{k_2}$$

$$A = \sqrt{w_1^2 + w_2^2}$$

$$\varphi_1 = \text{atan} 2(w_2, w_1)$$

где

μ_1, μ	–	массы Солнца и Земли соответственно,
a	–	астрономическая единица
r_{L_1}, r_L	–	расстояния от точки L_2 до Солнца и Земли соответственно
n_1	–	средняя угловая скорость орбитального движения Земли
$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3)^T$	–	вектор состояния КА во вращающейся СК с центром в точке L_2
$\omega_1, \omega_2, \lambda, k_1, k_2$	–	постоянные коэффициенты в периодическом решении
C_1, C_2, w_1, w_2	–	вспомогательные постоянные
$A, B, C, D, \varphi_1, \varphi_2$	–	параметры периодического решения (орбиты)

На каждом шаге после входа в окрестность точки либрации производится расчёт параметров квазипериодической орбиты $A, B, C, D, \varphi_1, \varphi_2$ - для контроля геометрии получаемой квазипериодической траектории. Алгоритм расчёта траектории перелёта КА с орбиты выведения на квазипериодическую орбиту в окрестности точки либрации завершает свою работу при завершении цикла по количеству шагов N_{steps} .

Глава 4

Поддержание квазипериодической орбиты

Квазипериодические орбиты являются неустойчивыми, так как наследуют гиперболическую неустойчивость коллинеарной либрационной точки, их порождающей. Кроме того, рассмотрение движения КА в численно-эфемеридной модели, описанной в разделе 3.1, приводит к необходимости парирования дополнительных возмущений, вызванных отличием ограниченной круговой задачи трёх тел, для которой построено квазипериодическое приближение, от численной модели Солнечной системы. Для поддержания квазипериодических орбит в окрестности коллинеарных точек либрации требуется периодическое проведение коррекций траектории КА. Задачу расчёта коррекций можно рассматривать как оптимизационную задачу с двумя оптимизируемыми параметрами, в качестве которых выступают отклонения траектории КА от номинальной орбиты и суммарные затраты характеристической скорости на поддержание орбиты (сумма импульсов коррекций), а ограничением выступает минимальный интервал между коррекциями, обусловленный необходимостью проведения траекторных измерений для определения орбиты КА. Могут быть введены и другие ограничения – например, ограничения на направления векторов импульсов коррекций, связанные с конструктивными особенностями аппарата. В данной работе подобные дополнительные ограничения не рассматривались.

Существует две основные стратегии поддержания квазипериодических орбит с помощью корректирующих манёвров. Первая – удержание траектории в некоторой окрестности номинального решения – данная стратегия была применена в ходе полёта КА “ISEE-3”. Вторая стратегия – удержание КА на центральном многообразии ограниченной круговой задачи трёх тел, содержащем периодические и квазипериодические орбиты – впервые была применена в ходе полёта КА “SOHO”. Данная стратегия ставит своей главной целью минимизацию неустойчивой компоненты решения системы линеаризованных уравнений движения [Simo, 1987], приводящей к экспоненциальному уходу из окрестности точки либрации. Вторая стратегия позволяет обеспечить поддержание периодической или квазипериодической орбиты существенно меньшей суммой корректирующих импульсов. Все последующие миссии к коллинеарным точкам либрации использовали различные методики расчёта коррекций, реализующие варианты этой стратегии удержания КА на орбите в окрестности точки либрации.

Однако минимизация неустойчивой компоненты решения, полученного в рамках ограниченной задачи трёх тел, является необходимым, но не достаточным условием поддержания квазипериодической орбиты – необходимо также парировать возмущения, вызванные гравитационным воздействием планет Солнечной системы и избегать нежелательной долгосрочной эволюции орбиты.

Методы расчёта коррекций поддержания квазипериодической орбиты, использованные в данной работе, реализуют стратегию удержания траектории КА на центральном многообразии динамической системы. В ходе решения задачи было предложено несколько методов расчёта импульса, некоторые из которых оказались эффективнее других. Тем не менее, для полноты изложения результатов и обоснования выбора конечной методики, позволившей получить квазипериодические орбиты с заданными геометрическими характеристиками в рамках полной численно-эфемеридной модели Солнечной системы, рассмотрим все использованные методики расчёта коррекций поддержания квазипериодической орбиты КА в окрестности точки L_2 .

Все использованные методики имеют общую структуру: коррекция рассчитывается с периодичностью один раз в 45 суток (примерно $\frac{1}{4}$ периода квазипериодической орбиты в окрестности точки либрации, определяемого как интервал времени между двумя последовательными пересечениями траекторией КА плоскости XZ от отрицательных значений y к положительным), расчёт траектории КА между коррекциями поддержания квазипериодической орбиты выполняется численным интегрированием уравнений движения КА в эфемеридной модели Солнечной системы, описанной в разделе 3.1. Первая коррекция поддержания квазипериодической орбиты рассчитывается в момент перехода с траектории перелёта на квазипериодическую орбиту – на 100-е сутки полёта. Вектор импульса коррекции уточняется градиентным методом из условия минимизации некоторого функционала, характеризующего траекторию, рассчитанную численным интегрированием от начальных условий в точке проведения коррекции, с учетом рассчитанного импульса. Минимум ищется градиентным методом с регулируемым шагом. Поправки к вектору скорости вычисляются по формуле:

$$\begin{pmatrix} \Delta V_x^{(i)} \\ \Delta V_y^{(i)} \\ \Delta V_z^{(i)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\Delta V_{\max}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial V_x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial V_y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial V_z}\right)^2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial V_x} \\ \frac{\partial F}{\partial V_y} \\ \frac{\partial F}{\partial V_z} \end{pmatrix}$$

где $\Delta V_{\max}$ – максимально допустимое значение поправки, $F(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ – используемый функционал, k – номер итерации цикла сокращения шага. На каждом шаге i итерационного процесса контролируется выполнение условия $(F)_i > (F)_{i+1}$. Если условие не выполняется, происходит переход к циклу сокращения поправок к вектору скорости до уровня, при котором выполняется условие: $(F)_i > (F)_{i+1}$. На каждом проходе этого цикла компоненты поправок к вектору скорости сокращаются в два раза (k увеличивается на 1). При достижении локального минимума выполняется переключение метода на покоординатный спуск. Итерационный процесс завершается при достижении локального максимума. На каждой итерации цикла расчёта поправки к вектору скорости происходит контроль её нормы, если $\|\Delta \vec{V}\| > \Delta V_{\max}$ и при этом $F > (F)_{\max}$, то происходит выход из цикла расчёта импульса коррекции (значение $\Delta V_{\max}$ принято равным 1.5 м/с, значение $(F)_{\max}$ выбирается в зависимости от используемого функционала).

Первая использованная методика предполагала минимизацию параметра C при экспоненте с действительным собственным значением с положительным знаком по времени, обуславливающего неустойчивость решения линеаризованной системы (1.10.). Расчёт параметров A , B , C и D решения линеаризованной системы уравнений движения задачи трёх тел, характеризующих геометрию и устойчивость орбиты, выполнялся согласно выражениям (3.5) в каждой точке рассчитываемой траектории (с шагом 12 часов). Функционал F_C имеет следующий вид:

$$F_C(v_x, v_y, v_z) = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} C(t)^2 dt$$

(необходимо отметить - так как значения параметров A , B , C и D рассчитываются с некоторой конечной скважностью, при использовании в алгоритме данного функционала знак интегрирования следует заменить на сумму). На временном интервале до следующей коррекции (T – периодичность проведения коррекций) минимизируется значение квадрата C . Недостаток работы алгоритма расчёта коррекций с использованием данного функционала заключается в постепенном уменьшении значения параметра B – траектория движения КА приближается к плоскости эклиптики, попадая в тень Земли, и, в конечном итоге, стремится к орбите Лиссажу с малыми амплитудами.

Для контроля геометрии получаемой квазипериодической орбиты в минимизируемый функционал было введено значение параметра B , задающего амплитуду осцилляций в плоскости, ортогональной эклиптике:

$$F_{BC}(\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y, \mathbf{v}_z) = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \left((B(t) - \theta_B r_L)^2 + C(t)^2 \right) dt$$

Таким образом, наряду со значением параметра C минимизации подвергался квадрат разности между проектным значением параметра $B = \theta_B r_L$ и значением $B(t)$, рассчитываемым по полученной траектории. Практика использования данного функционала показала, что в нелинейном случае, отвечающем квази гало-орбитам, с учётом возмущений различного рода в численно-эфемеридной модели Солнечной системы линейное приближение позволяет производить оценку геометрии и устойчивости полученного решения, но является слишком грубым для вычисления импульсов коррекций – суммарные значения импульсов коррекций для поддержания квазипериодической орбиты, рассчитанных с помощью данного функционала, составляли десятки метров в секунду; тем не менее, орбита КА эволюционировала, вырождаясь в орбиту Лиссажу.

Был предложен третий функционал, оптимизирующий время пребывания КА в заданной окрестности точки либрации L_2 после выполнения коррекции траектории:

$$F_{\Delta t}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = -(t_{\text{out}L_2} - t_{\text{in}L_2})$$

Максимизация времени пребывания в окрестности точки L_2 позволяет естественным образом продолжить квази гало-орбиту после выполнения коррекции. Такой способ расчёта коррекций позволяет находиться в заданной окрестности точки либрации бесконечно долго – уход от квазипериодической траектории обусловлен только её неустойчивостью и действующими возмущениями. Минимальные корректирующие импульсы позволяют парировать внешние возмущения и поддерживать решение на выбранном семействе квази гало-орбит с заданным уровнем энергии (амплитудами), контролируя время существования решения в заданной окрестности точки либрации. Первая коррекция, выполняемая при переходе с траектории перелёта на квазипериодическую орбиту, позволяет выйти на класс решений, существующих в окрестности точки либрации в течение достаточно долгого периода времени (около 300 суток), если вектор состояния КА после перелёта не удовлетворяет этому условию. Численный анализ показал, что есть случаи, в которых для выполнения этого перехода может потребоваться импульс, превышающий по модулю сумму всех последующих импульсов коррекций поддержания квазипериодической орбиты. Отсутствие в функционале каких-либо параметров линейного решения позволяет сохранить движение в окрестности квазипериодической орбиты, в случае, если начальное приближение ей принадлежало. При использовании данного метода суммы импульсов, требуемых для

поддержания выбранной квазипериодической орбиты в течение 7.5 лет в среднем составляют 14.8 м/с для орбиты КА «Спектр-РГ» и 38 м/с для орбиты КА «Миллиметрон» без учёта ошибок исполнения манёвров коррекций орбиты и выбора оптимального окна старта. Наложение ограничений на диапазон дат старта (см. главу 5) снижает средние значения суммы импульсов коррекций поддержания орбиты до 9.8 м/с и 18.4 м/с для орбит КА «Спектр-РГ» и «Миллиметрон» соответственно. Данные значения на порядок меньше предполагаемого запаса характеристической скорости на борту КА «Спектр-РГ» и «Миллиметрон».

В результате работы алгоритма расчёта импульсов коррекций строится траектория движения КА по квазипериодической орбите в течение заданного временного интервала в рамках численно-эфемеридной модели Солнечной системы, описанной в разделе 3.1. После завершения расчёта траектории КА выполняется расчёт справочной баллистической информации, актуальной при выборе рабочей орбиты КА из множества рассчитанных вариантов. В частности, рассчитываются зоны видимости КА с наземных станций слежения. Для обеспечения траекторных измерений в рамках проекта «Спектр-Миллиметрон» предполагается использовать наземные станции в Медвежьих Озерах и на Байконуре. Необходимо также привлечение станции в южном полушарии, так как в связи с большим выходом КА из плоскости эклиптики в южном направлении не всегда возможно обеспечить видимость КА с наземных станций слежения, расположенных в северном полушарии. Кроме того, производится оценка светотеневой обстановки на борту КА, и, при необходимости, выполняется точный расчёт, позволяющий вычислить время нахождения КА в тени Земли. В целом класс квази гало-орбит удовлетворяет условию постоянной освещенности КА Солнцем.

Рассмотрим примеры построенных квазипериодических орбит в окрестности точки L_2 .

Графики на рис. 4.1-4.6 соответствуют траекториям, рассчитанным для КА «Спектр-РГ» и «Спектр-М» для дат старта 30.03.2016 и 15.09.2018, суммы импульсов коррекций поддержания траектории составляют 10 м/с и 24 м/с.

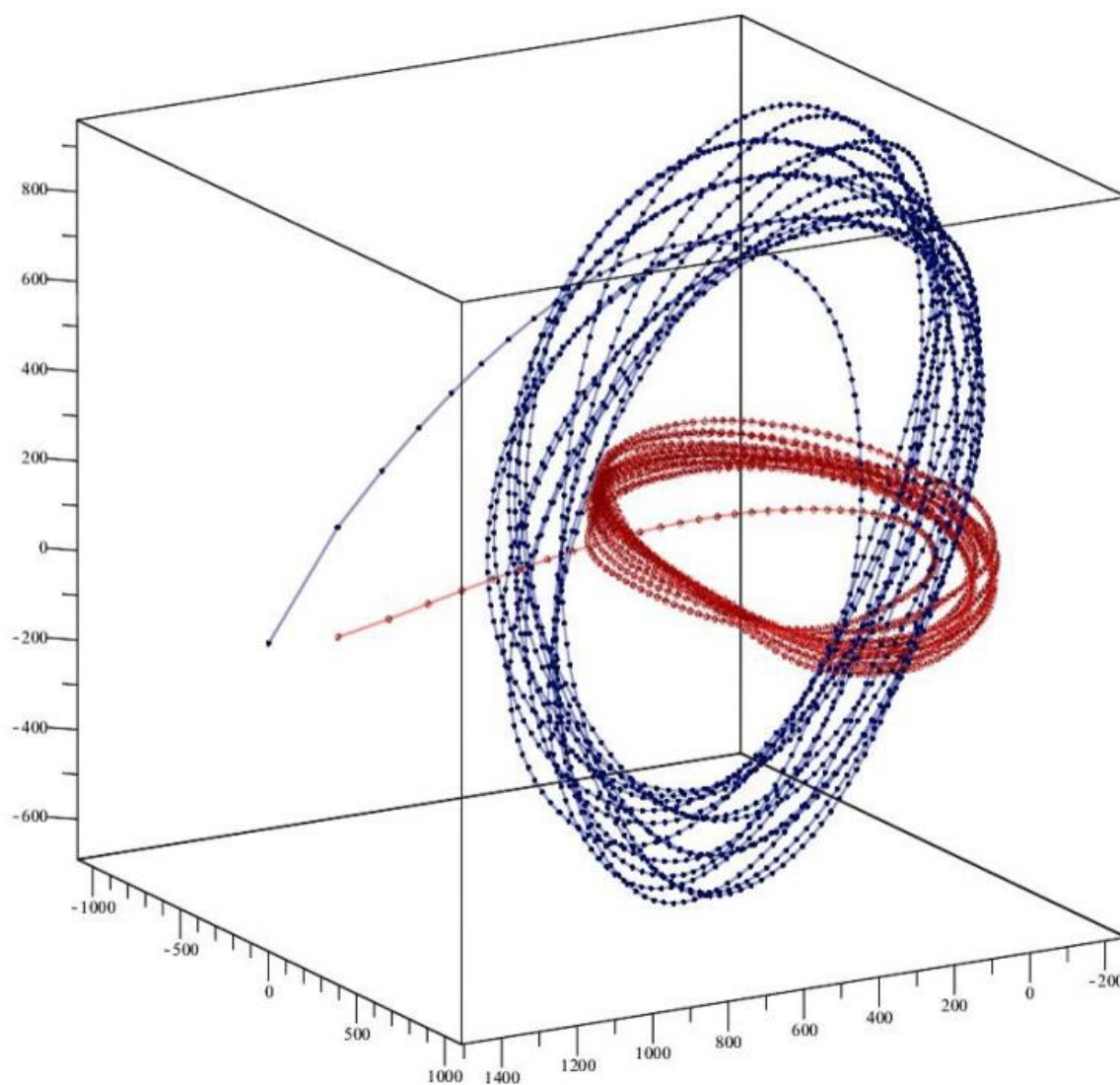


Рис. 4. 1 Пространственная визуализация рассчитанных траекторий КА «Спектр-РГ» (красный цвет) и «Спектр-М» (синий цвет) в СК с центром в точке L_2 , размерность – тыс. км.

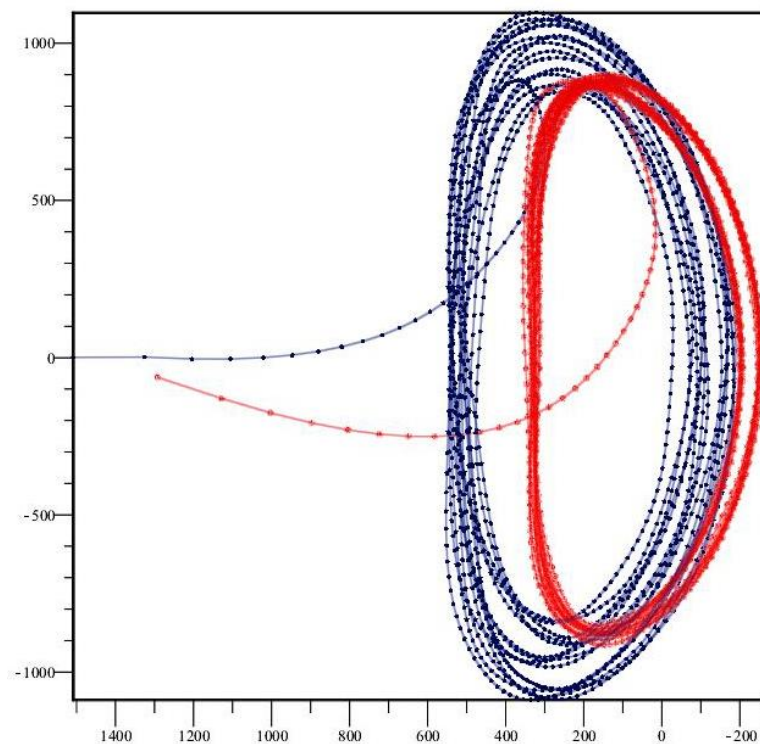


Рис. 4.2 Проекция траекторий КА «Спектр-РТ» (красный цвет) и «Спектр-М» (синий цвет) на плоскость XY вращающейся СК с центром в точке L_2 , размерность – тыс. км.

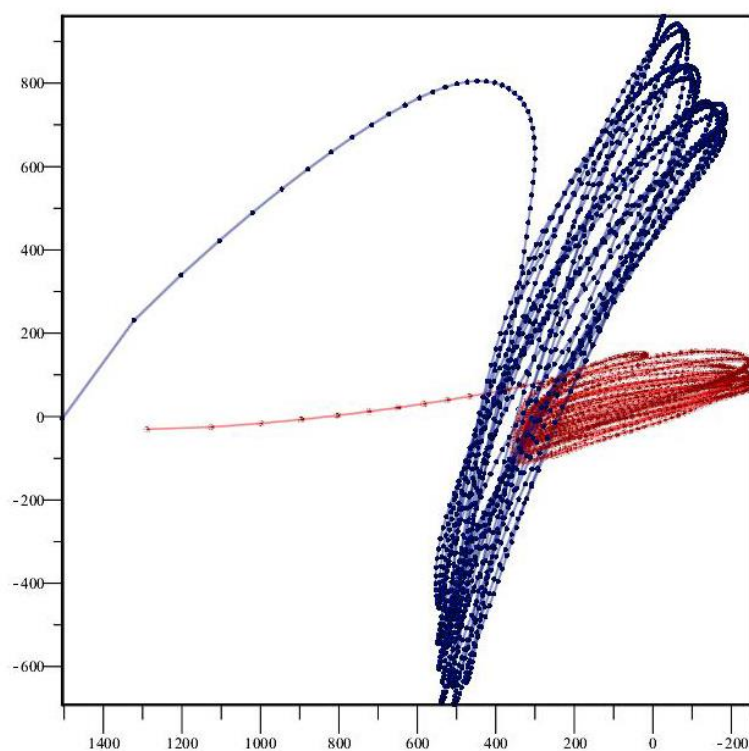


Рис. 4.3 Проекция траекторий КА «Спектр-РТ» (красный цвет) и «Спектр-М» (синий цвет) на плоскость XZ вращающейся СК с центром в точке L_2 , размерность – тыс. км.

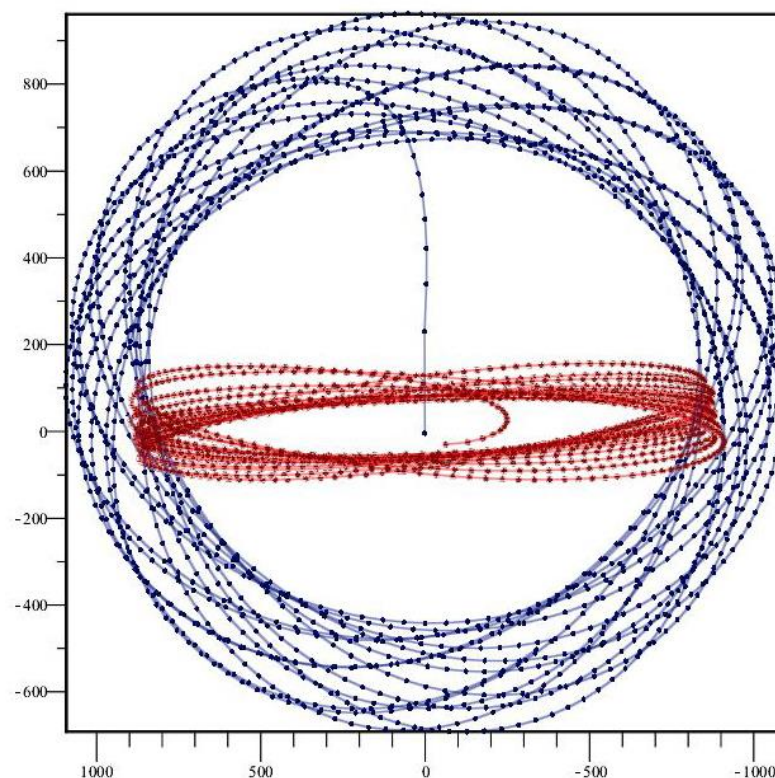


Рис. 4.4 Проекция траекторий КА «Спектр-РГ» (красный цвет) и «Спектр-М» (синий цвет) на плоскость YZ вращающейся СК с центром в точке L_2 , размерность – тыс. км.

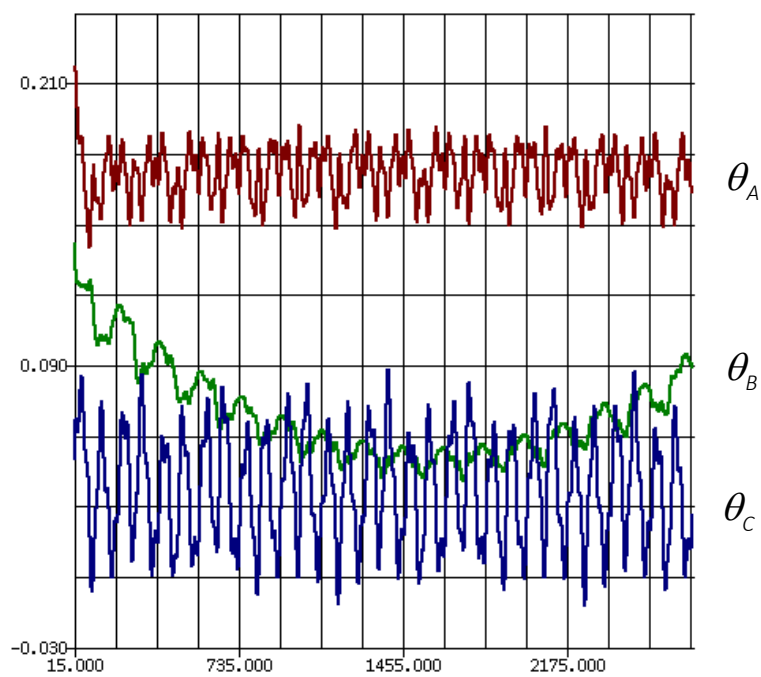


Рис. 4.5 График эволюции безразмерных параметров $\theta_A, \theta_B, \theta_C$, характеризующих геометрию и устойчивость орбиты КА «Спектр-РГ».

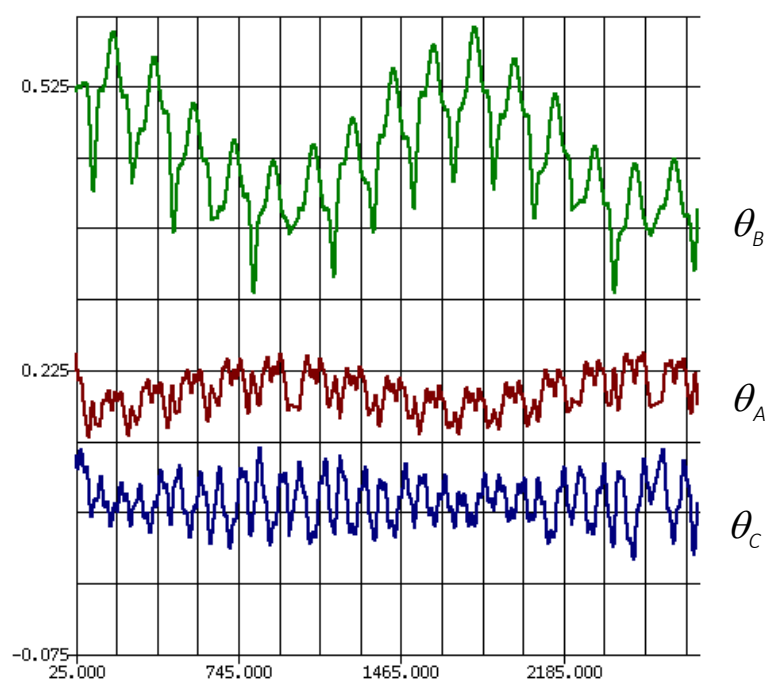


Рис. 4.6 График эволюции безразмерных параметров $\theta_A, \theta_B, \theta_C$, характеризующих геометрию и устойчивость орбиты КА «Спектр-М».

Из графиков, представленных на рис. 4.5, 4.6 видно, что предложенная методика поддержания квазипериодической орбиты позволяет удерживать значение параметра θ_C близким к нулю без прямого контроля его значения. Параметры θ_A, θ_B также остаются в некоторых коридорах значений для обеих орбит. Изменение коэффициента θ_B с течением времени для орбиты КА «Спектр-РГ» демонстрирует эволюцию траектории - постепенное вращение плоскости орбиты на некоторый угол относительно плоскости эклиптики с сохранением параметра θ_A .

На рис. 4.7-4.10 представлены траектории КА «Спектр-РГ» и «Спектр-М» во вращающейся СК с центром в точке L_2 для дат старта 22.04.2016 и 23.08.2019. Сумма импульсов коррекций для поддержания траекторий в течение 7.5 лет составляет 5 м/с для траектории КА «Спектр-РГ» и 20 м/с для траектории КА «Спектр-М». В отличие от траекторий на рис. 4.1-4.4, данные траектории построены с соблюдением равного масштаба по различным осям вращающейся СК при визуализации графика, что позволяет несколько точнее судить о геометрии полученной квазипериодической орбиты, в то время как графики на рис 4.1-4.4 имеют кубическую или квадратную области построения, что незначительно искажает проекции траектории движения КА на различные оси вращающейся СК.

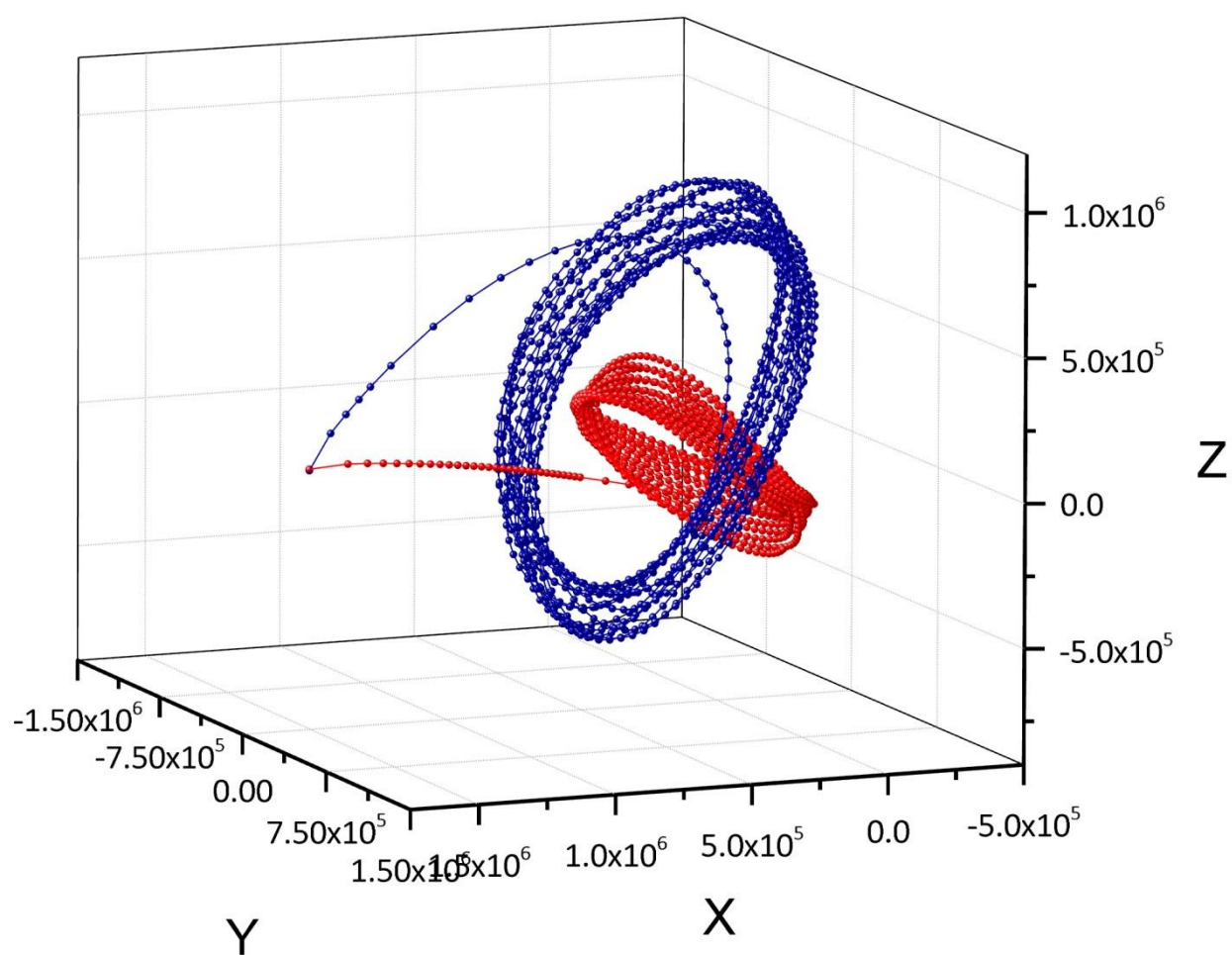


Рис. 4.7 Пространственная визуализация рассчитанных траекторий КА «Спектр-РГ» (красный цвет) и «Спектр-М» (синий цвет) в СК с центром в точке L_2 , размерность – тыс. км.

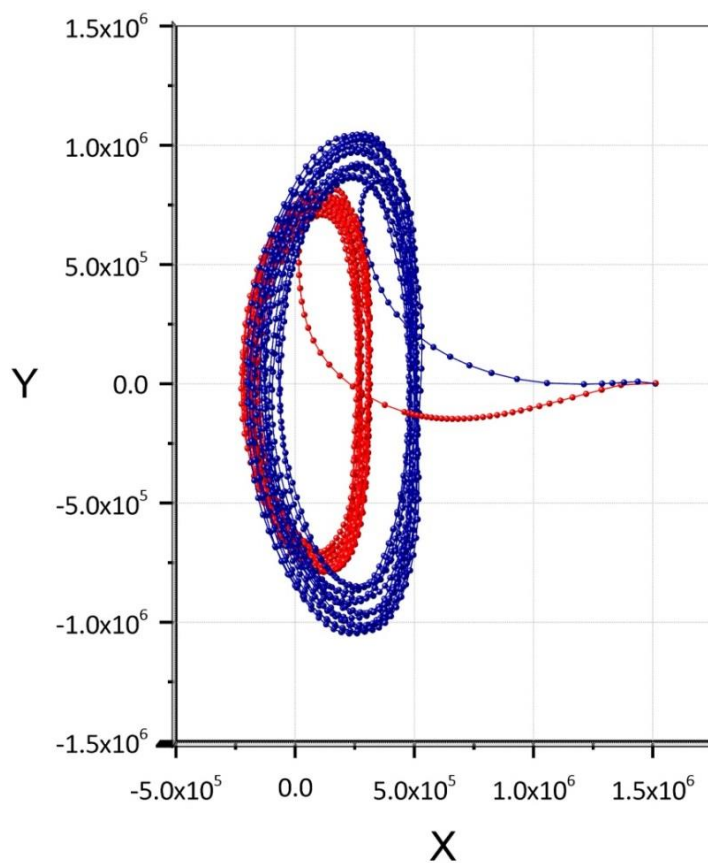


Рис. 4.8 Проекция траекторий КА «Спектр-РГ» (красный цвет) и «Спектр-М» (синий цвет) на плоскость XY вращающейся СК с центром в точке L_2 , размерность – тыс. км.

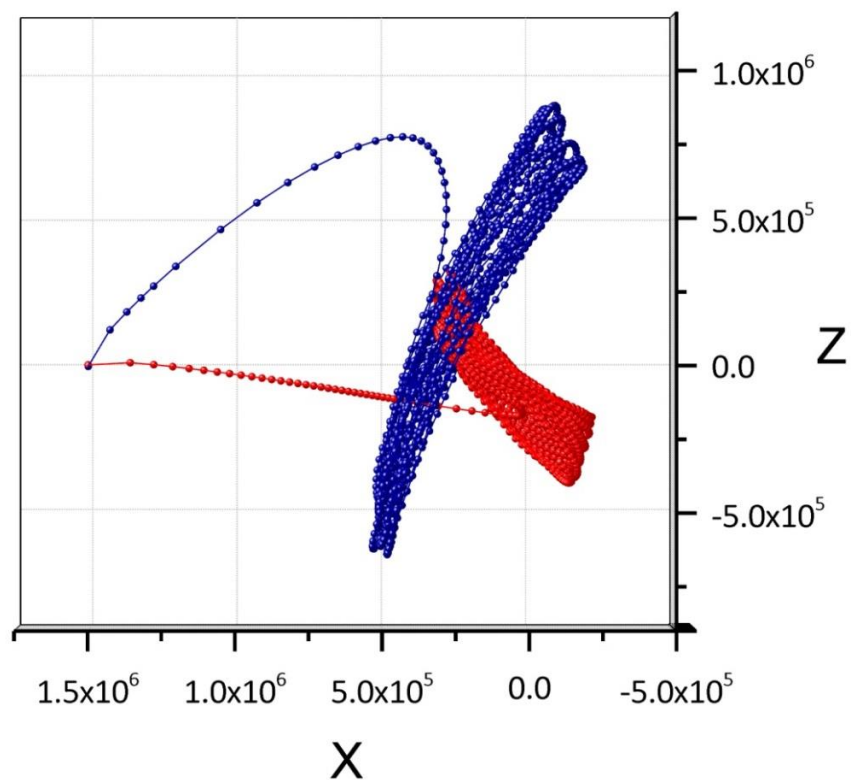


Рис. 4.9 Проекция траекторий КА «Спектр-РГ» (красный цвет) и «Спектр-М» (синий цвет) на плоскость XZ вращающейся СК с центром в точке L_2 , размерность – тыс. км.

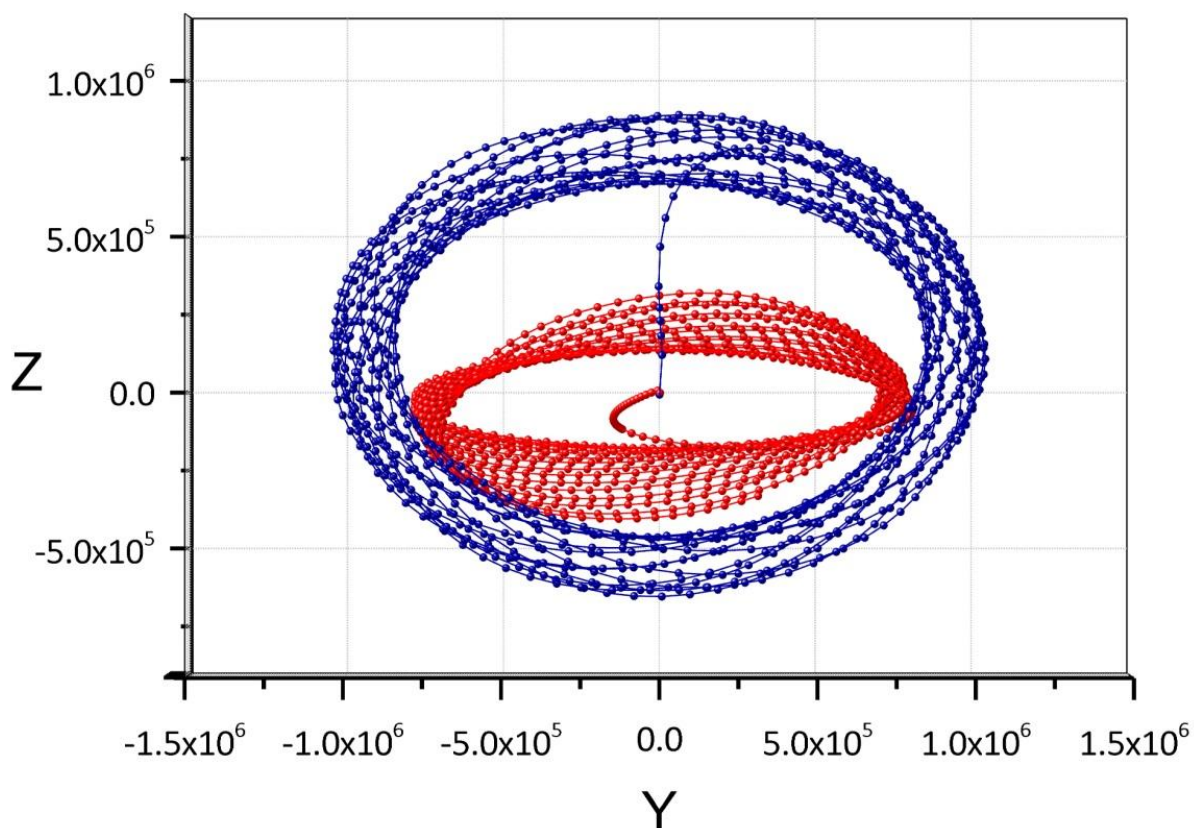


Рис. 4.10 Проекция траекторий КА «Спектр-РГ» (красный цвет) и «Спектр-М» (синий цвет) на плоскость YZ вращающейся СК с центром в точке L_2 , размерность – тыс. км.

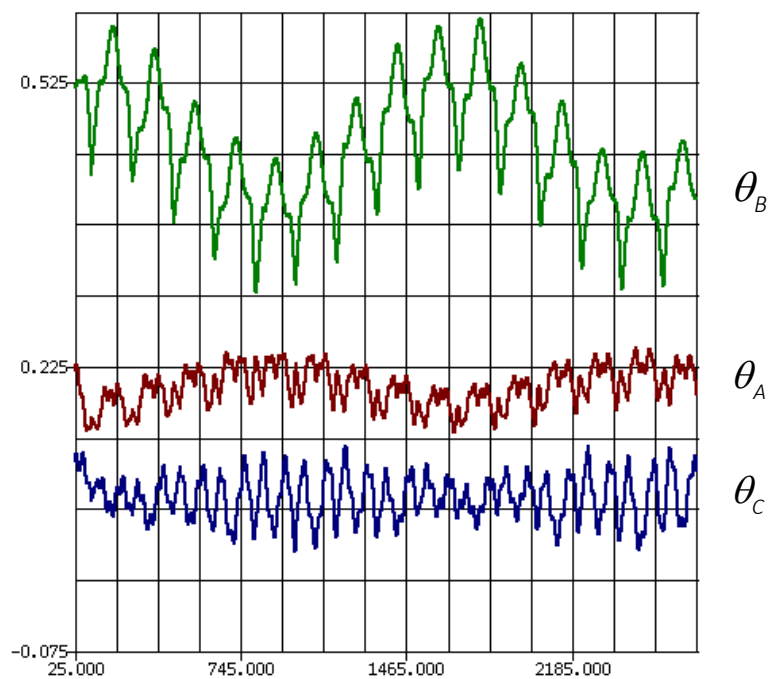


Рис. 4.11 График эволюции безразмерных параметров $\theta_A, \theta_B, \theta_C$, характеризующих геометрию и устойчивость орбиты КА «Спектр-РГ».

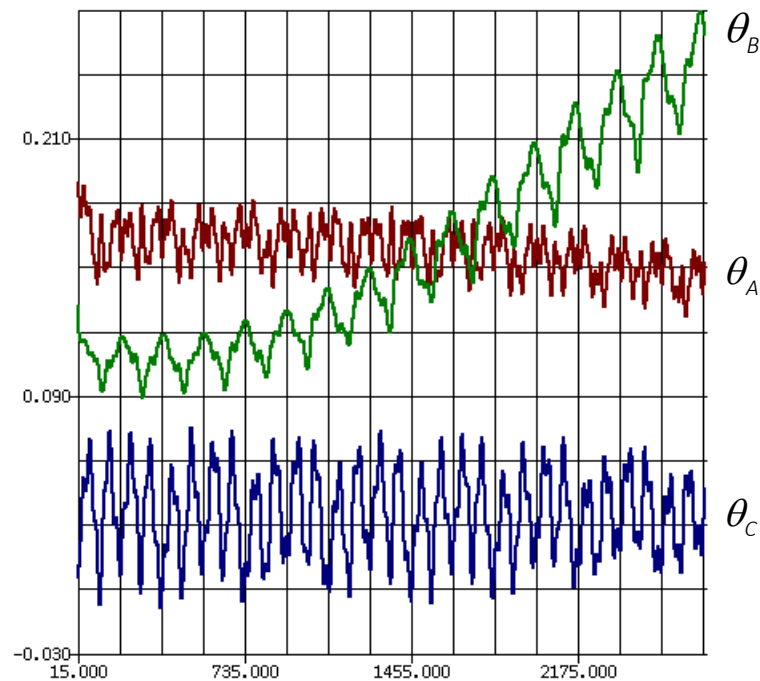


Рис. 4.12 График эволюции безразмерных параметров $\theta_A, \theta_B, \theta_C$, характеризующих геометрию и устойчивость орбиты КА «Спектр-М».

Графики эволюции траекторий, изображенных на рис 4.7-4.10, также отражают успешное поддержание параметра θ_C в окрестности нулевого значения. Для траектории КА «Спектр-РГ» параметр θ_B возрастает с течением времени, однако данный факт не мешает реализации научной программы – квазипериодическая орбита, как и в предыдущем случае, поворачивается на небольшой угол относительно плоскости эклиптики, сохраняя свою геометрию.

В рамках анализа рассчитанных коррекций были построены графики (рис. 4.13 – 4.20), изображающие орбиты КА «Спектр-РГ» и «Спектр-М» (те же, что и на графиках 4.7-4.10) и векторы коррекций, приложенные в точках проведения коррекций поддержания квазипериодической орбиты. Точки орбит изображены чёрным цветом, точки проведения коррекций – красным, векторы – зелёным цветом. Модуль и направление векторов на рисунках соответствует модулю и направлению рассчитанных векторов корректирующих импульсов во вращающейся СК с центром в точке L_2 с учётом умножения всех векторов на константу 10^9 для наглядного отображения на графиках траекторий размерности 10^9 м. Исходная размерность корректирующих импульсов – единицы, десятые и сотые доли м/с.

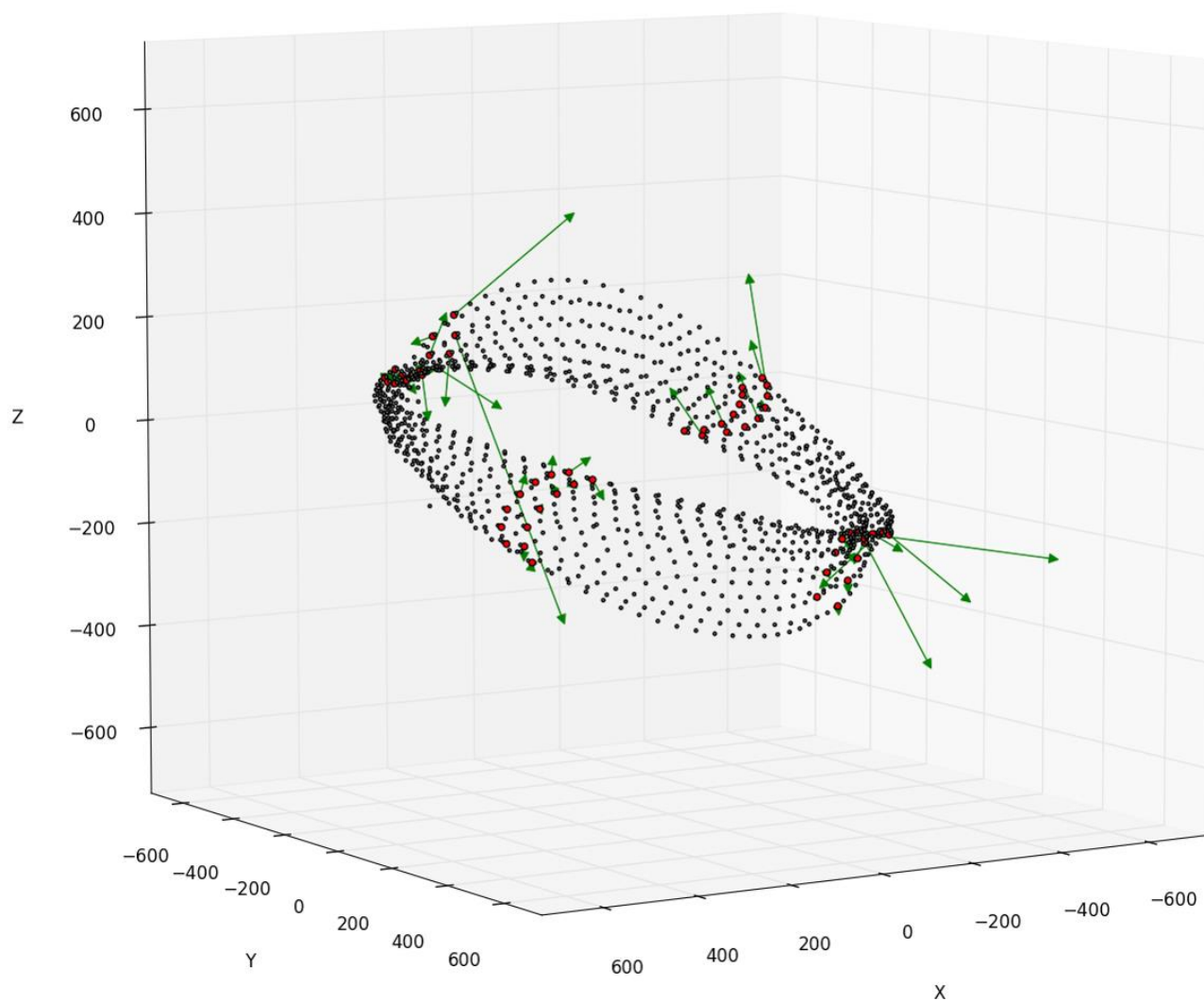


Рис. 4.13 Траектория КА «Спектр-РГ» и векторы коррекций во вращающейся СК с центром в точке L_2 , размерность – тыс. км.

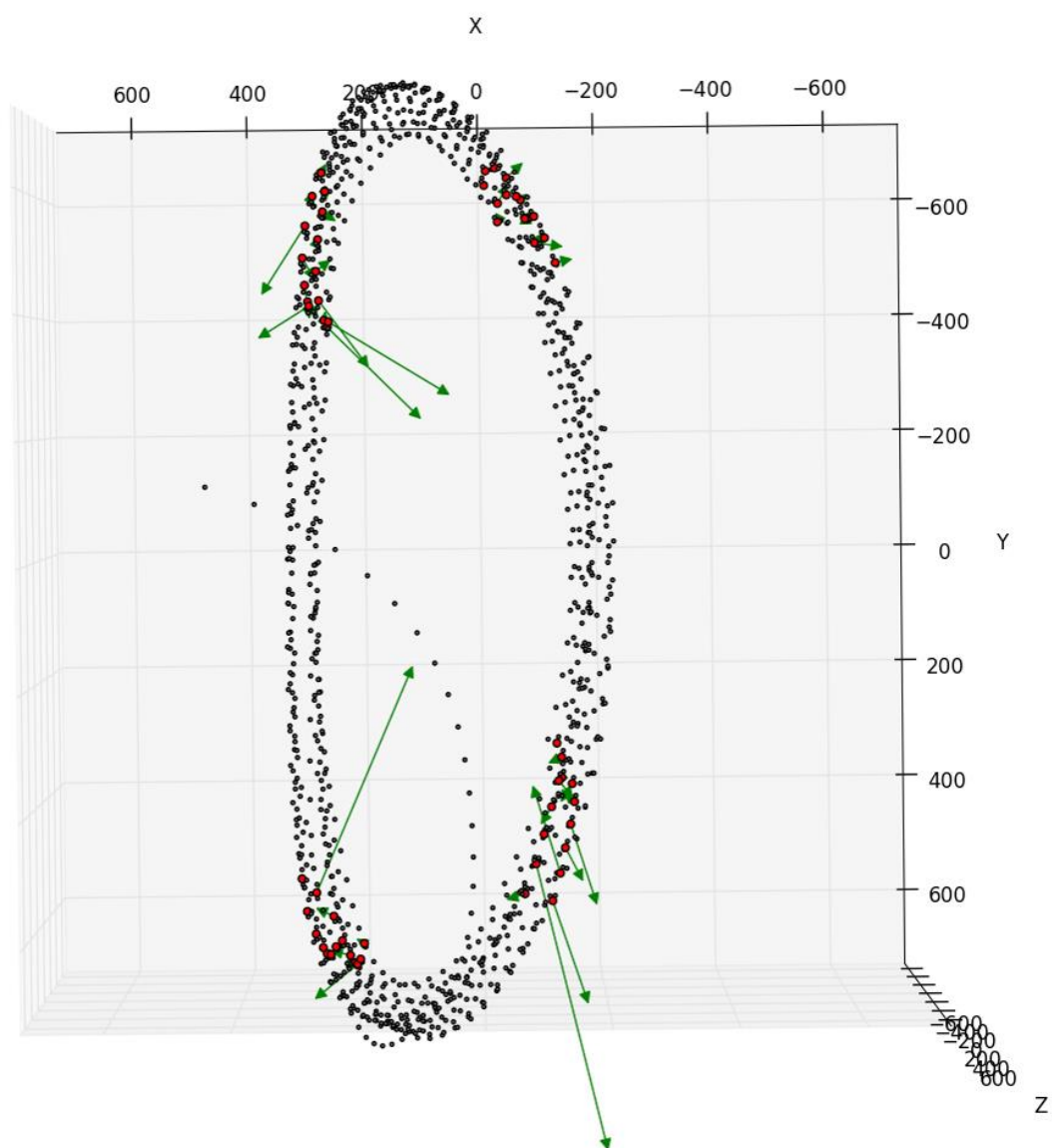


Рис. 4.14 Траектория КА «Спектр-РГ», плоскость XU вращающейся СК с центром в точке L_2 .

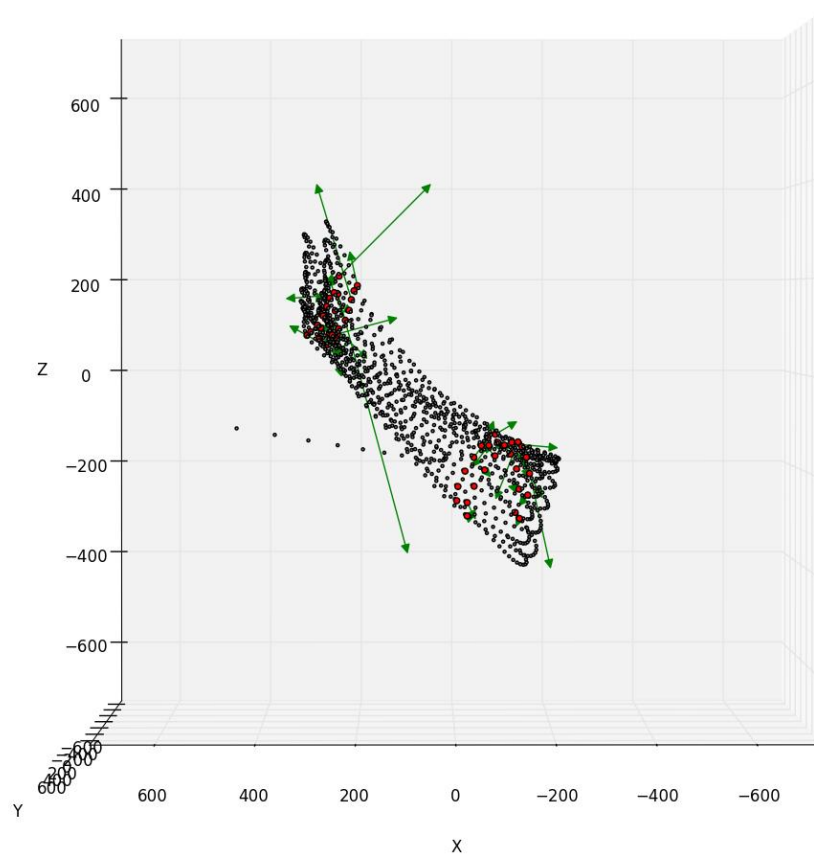


Рис. 4.15 Траектория КА «Спектр-РГ», плоскость XZ вращающейся СК с центром в точке L_2 .

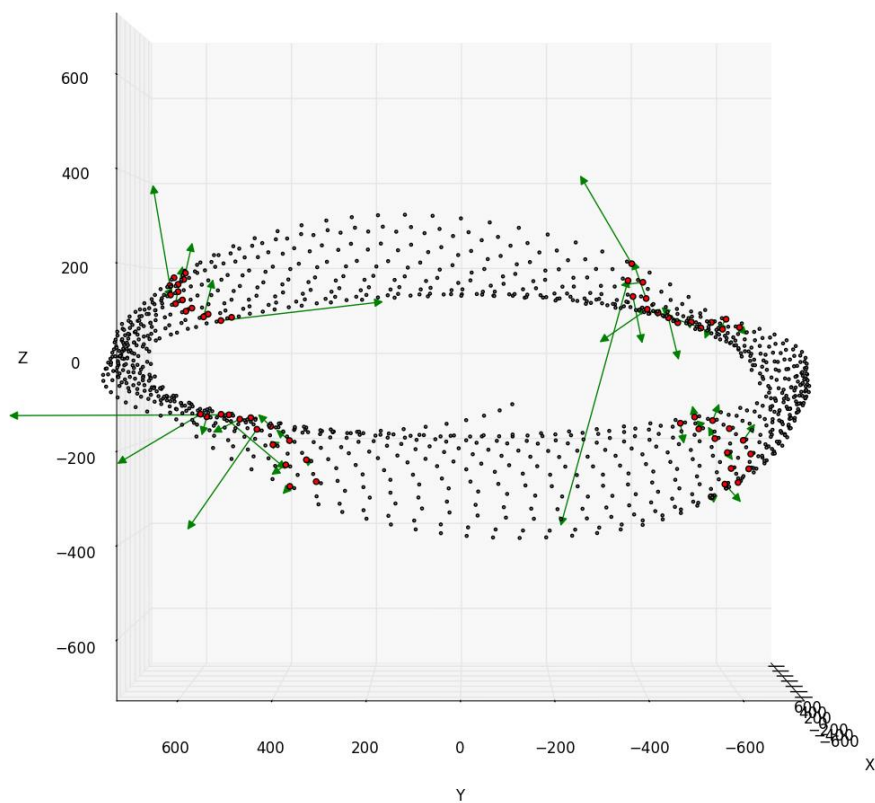


Рис. 4.16 Траектория КА «Спектр-РГ», плоскость YZ вращающейся СК с центром в точке L_2 .

Из представленных графиков видно, что коррекции поддержания квазипериодической орбиты необходимо проводить не только в направлениях, обратных направлениям векторов, изображенных на рис. 1.2 и задающих направление экспоненциального ухода от периодических решений. Векторы корректирующих импульсов существенно различаются как по направлению, так и по модулю. Примерно в 30% точек запланированного проведения коррекций рассчитанный модуль импульса оказывается меньше порогового значения и коррекция траектории не проводится, что говорит о качестве найденной траектории.

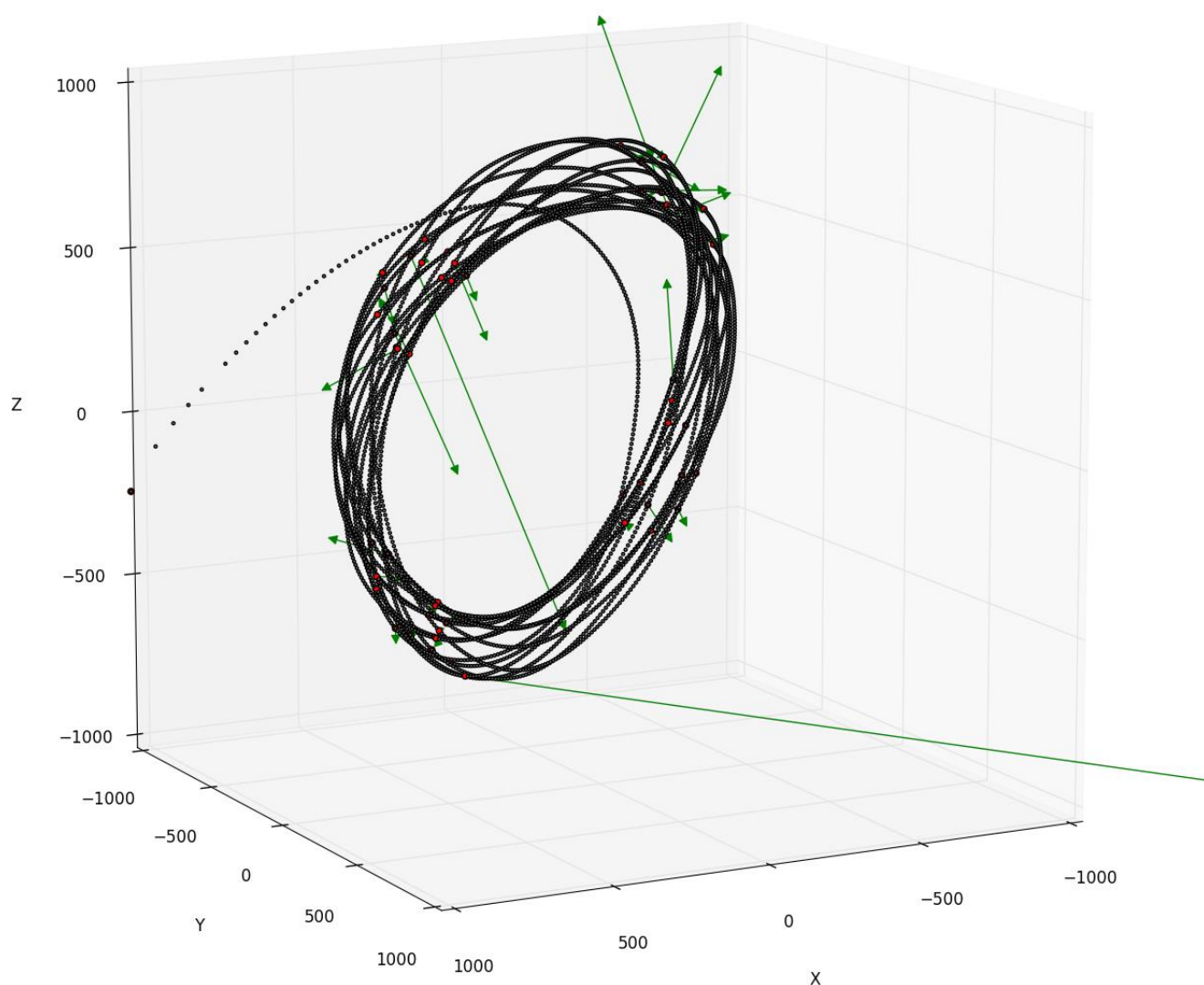


Рис. 4.17 Траектория КА «Спектр-М» и векторы импульсов коррекций во вращающейся СК с центром в точке L_2 , размерность – тыс. км.

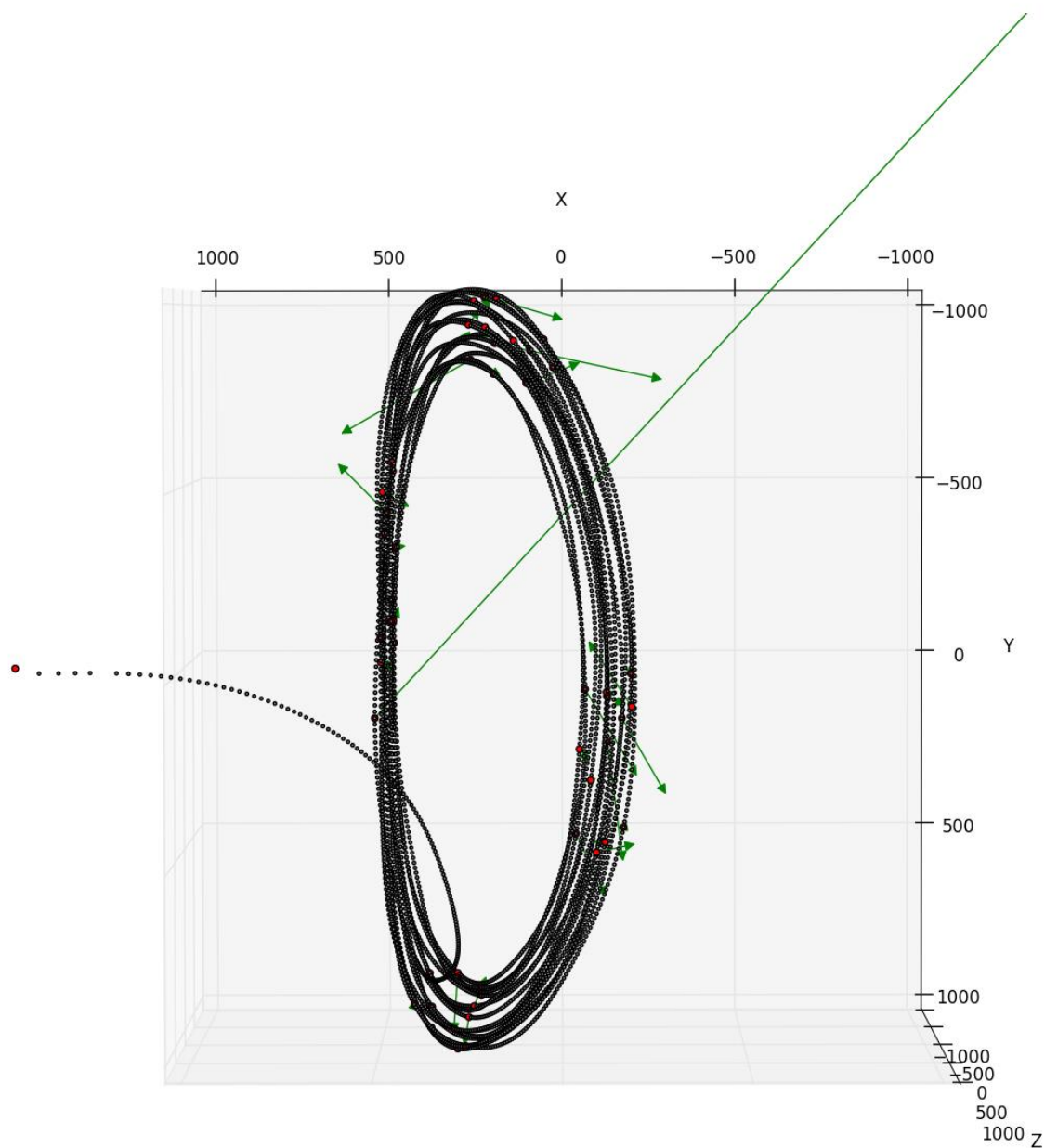


Рис. 4.18 Траектория и векторы импульсов коррекций поддержания квазипериодической орбиты КА «Спектр-М», плоскость XY вращающейся СК с центром в точке L_2

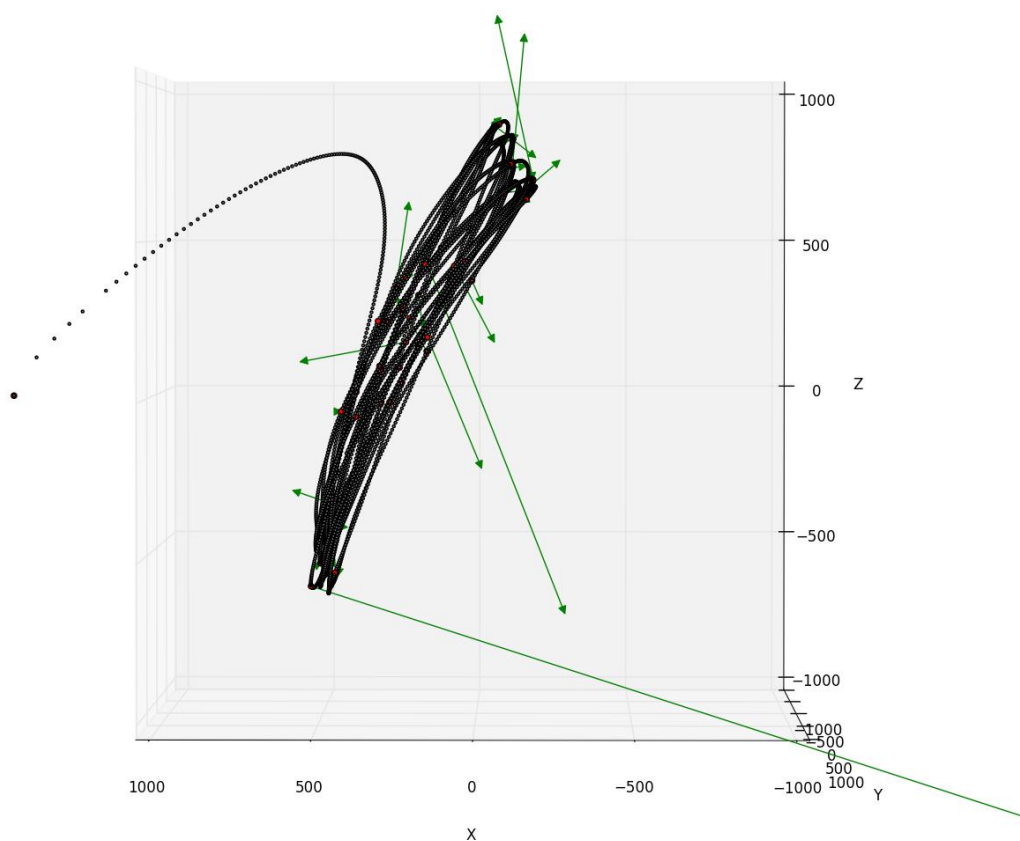


Рис. 4.19 Траектория и векторы импульсов коррекций поддержания квазипериодической орбиты КА «Спектр-М», плоскость XZ вращающейся СК с центром в точке L_2

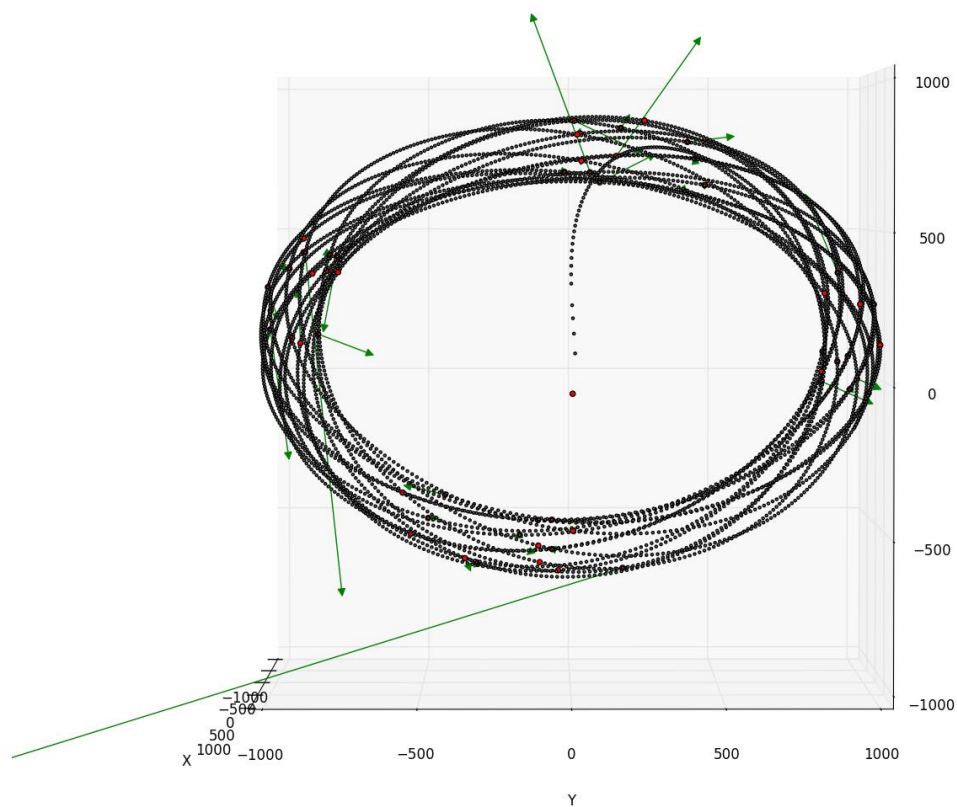


Рис. 4.20 Траектория и векторы импульсов коррекций поддержания квазипериодической орбиты КА «Спектр-М», плоскость XZ вращающейся СК с центром в точке L_2

При переходе на квази гало-орбиту с большой амплитудой в плоскости, ортогональной эклиптике, в данной реализации расчёта потребовался импульс, по модулю (14 м/с) превышающий сумму всех последующих импульсов коррекций поддержания квазипериодической орбиты (6 м/с), поэтому вектор первой коррекции выходит за пределы области построения графиков 4.17-4.20. Подобная коррекция характерна для траекторий с большим выходом из плоскости эклиптики, рассчитанных для проекта «Миллиметрон». В остальном выводы, сделанные на основании анализа векторов коррекций поддержания квазипериодической траектории КА «Спектр-РГ», справедливы и для импульсов коррекций поддержания орбиты КА «Спектр-М» - векторы коррекций имеют различные направления и существенно различаются по модулю.

Статистические данные, отражающие распределение значений затрат характеристической скорости на поддержание квазипериодических орбит КА «Спектр-РГ» и «Миллиметрон», представлены на рис. 4.21-4.24. Каждый график содержит гистограмму распределения значений импульсов и функцию распределения (чёрные точки) с указанием её значения в процентах на графике.

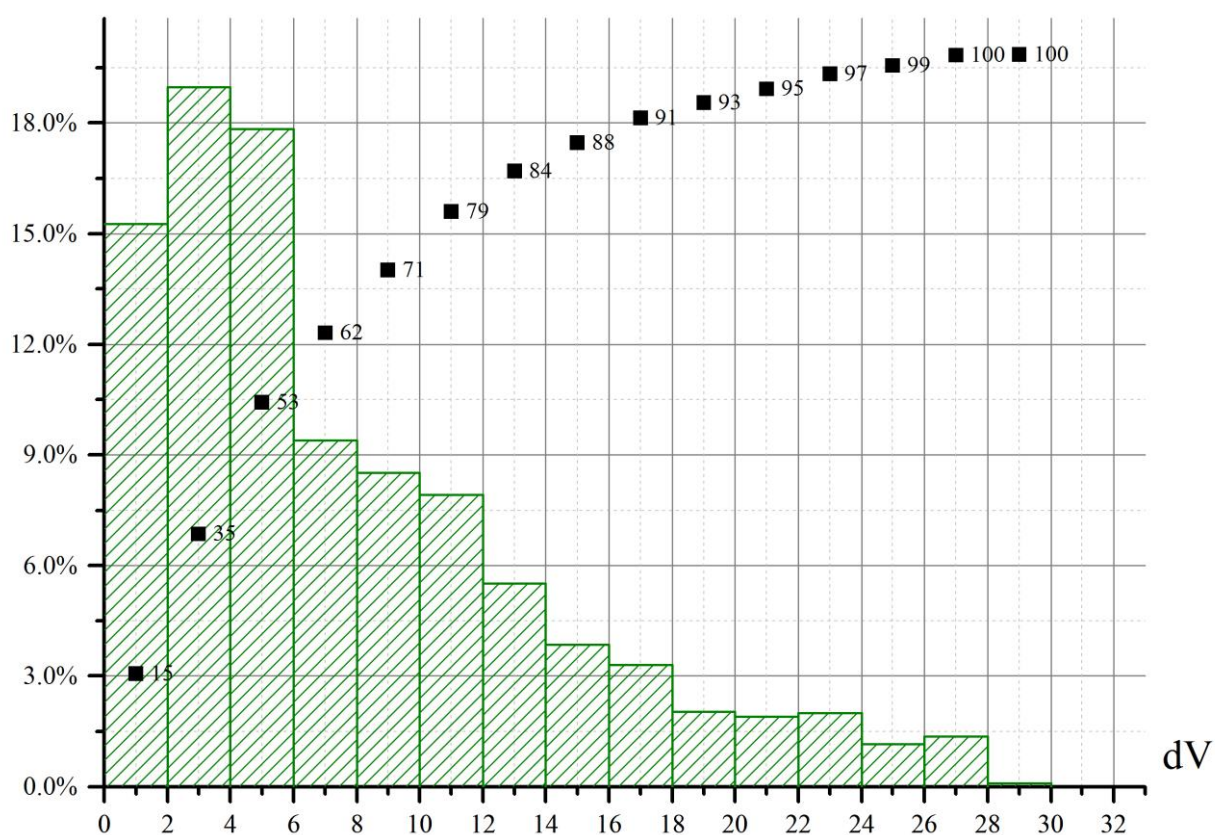


Рис. 4.21 Гистограмма распределения значений импульса первой коррекции поддержания квазипериодической орбиты КА «Спектр-РГ»

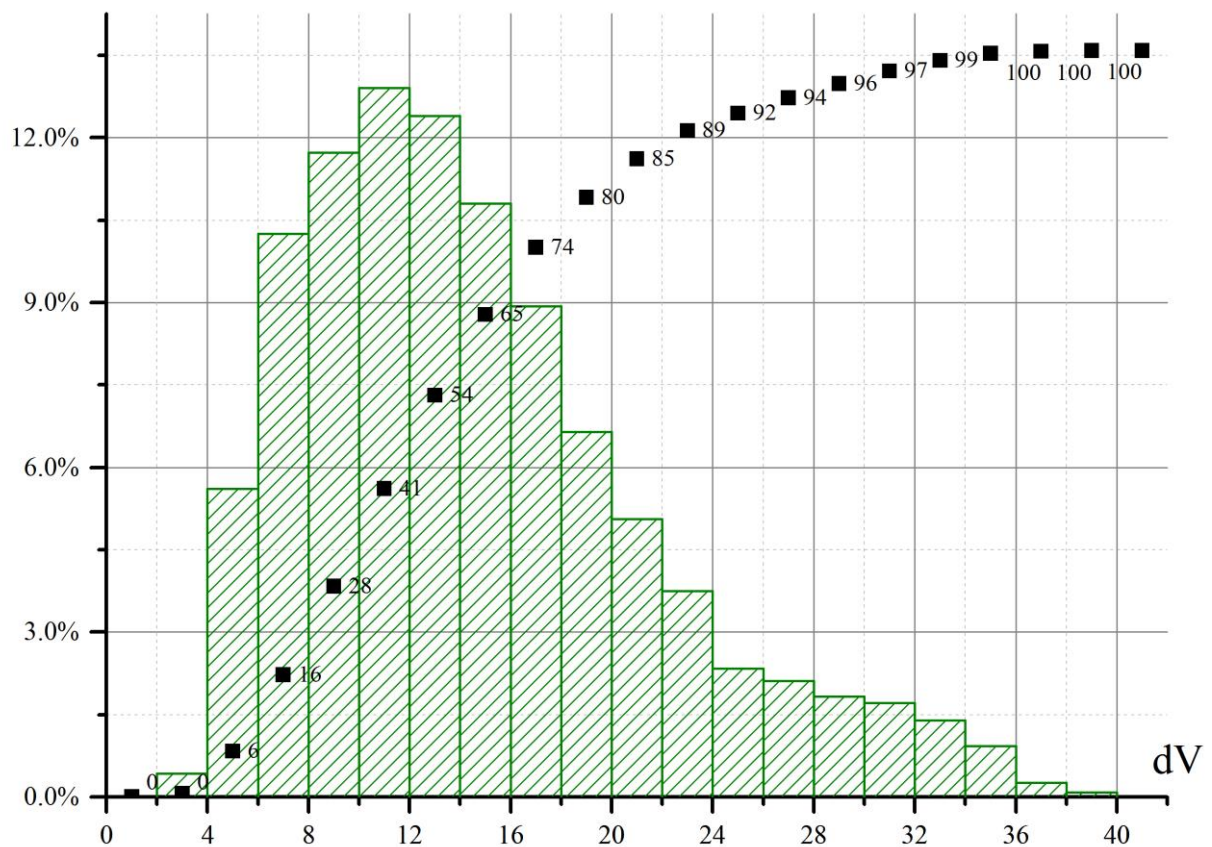


Рис. 4.22 Гистограмма распределения значений суммарных затрат характеристической скорости на коррекции поддержания орбиты КА «Спектр-РГ»

Статистические распределения затрат характеристической скорости, представленные в гистограммах, построены на основании результатов множественного расчёта траекторий перелёта в окрестность точки L_2 и движения по квазипериодической орбите, более подробно описанного в главе 5. Для КА «Спектр-РГ» было получено 6169 решений. Из представленных графиков видно, что в более чем 50% случаев первый импульс поддержания квазипериодической орбиты, обеспечивающий переход с траектории перелёта на квазипериодическую орбиту заданной геометрии, составляет не более 6 м/с (среднее значение – 3 м/с), а для 15% решений – до 2 м/с, что лежит в диапазоне возможных значений импульсов поддержания квазипериодической орбиты. В 85% случаев импульс первой коррекции не превышает 15 м/с (среднее значение в данном диапазоне решений составляет 5.5 м/с). Сумма импульсов коррекций поддержания квазипериодической орбиты, предложенной для КА «Спектр-РГ», в 80% случаев не превышает 20 м/с (среднее значение в указанном диапазоне составляет 11.9 м/с).

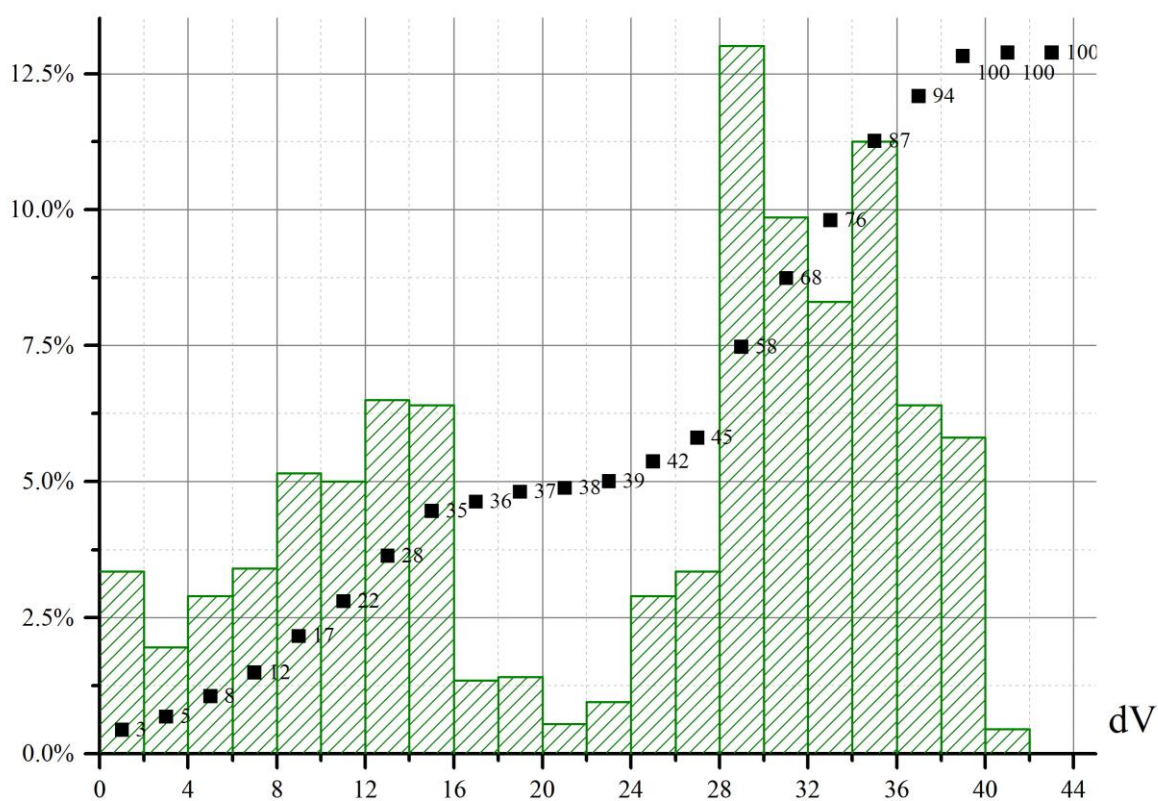


Рис. 4.23 Гистограмма распределения значений импульса первой коррекции поддержания квазипериодической орбиты КА «Спектр-М»

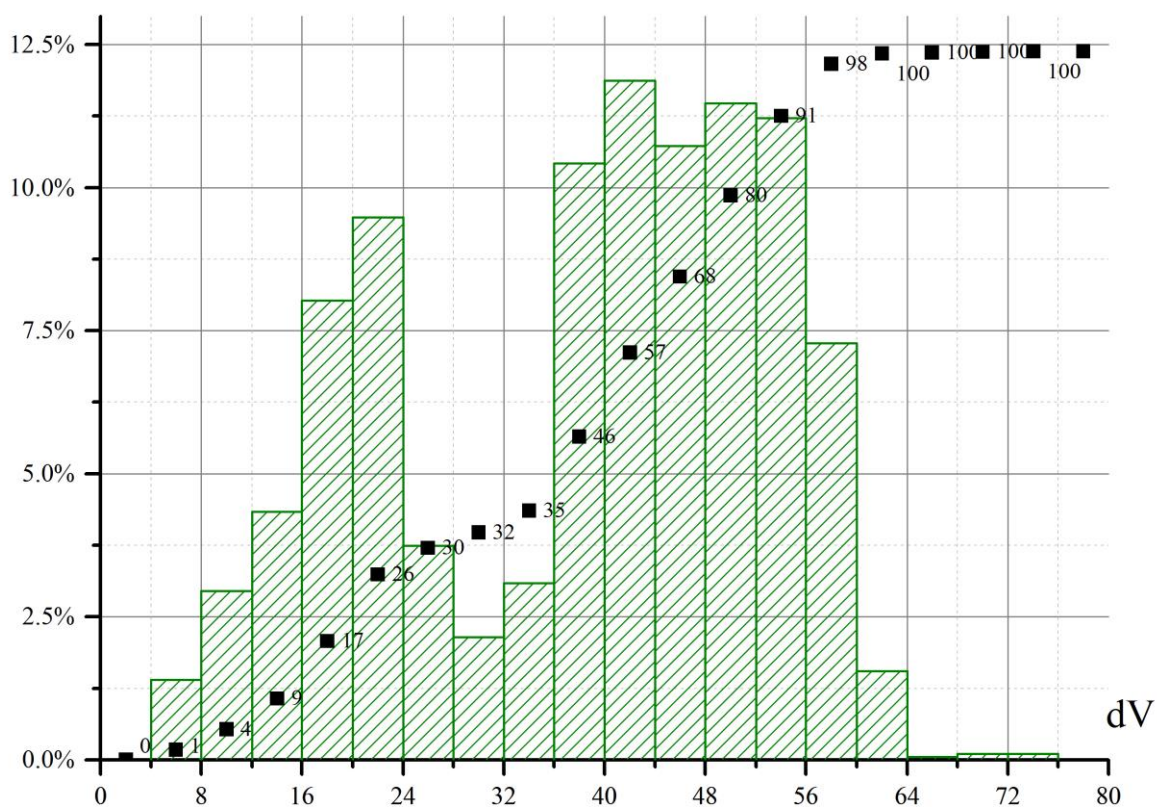


Рис. 4.24 Гистограмма распределения значений суммарных затрат характеристической скорости на коррекции поддержания орбиты КА «Спектр-М»

Аналогичный статистический анализ импульсов коррекций поддержания квазипериодической орбиты КА «Спектр-М» (исследовано 2005 решений) дал несколько иные результаты. Лишь 3% импульсов первой коррекции поддержания квазипериодической орбиты имеют значения до 2 м/с, около 35% лежат в диапазоне от 2 до 16 м/с (среднее значение в данном диапазоне составляет 9.3 м/с) – практически всегда для перехода на квази гало-орбиту большого радиуса требуется импульс, по модулю существенно превышающий последующие импульсы поддержания выбранной квазипериодической орбиты. В диапазоне значений от 16 до 28 м/с наблюдается спад плотности вероятности распределения. Второй пик плотности вероятности приходится на значения от 28 до 40 м/с. Подобное распределение значений первого импульса коррекции определяет характер функции плотности вероятности распределения значений суммарных затрат характеристической скорости на поддержание квази гало-орбиты – здесь также наблюдаются два пика – в диапазоне значений от 4 до 28 м/с лежит около 30% решений (среднее значение в диапазоне – 18.4 м/с), в диапазоне значений от 36 до 60 м/с – около 56% рассчитанных решений.

Проведённый анализ позволяет сделать следующий вывод: величина импульса первой коррекции, выполняемой на 100-е сутки перелёта при переходе на квазипериодическую орбиту, определяет значение суммарных затрат характеристической скорости на поддержание квази гало-орбиты в окрестности точки L_2 . В случае если значение импульса мало, перелёт на квазипериодическую орбиту можно считать одноимпульсным.

Для анализа эволюции полученной квазипериодической орбиты в ходе пассивного движения в окрестности точки L_2 радиуса 1.2 млн км были построены графики, представленные на рис. 4.25, 4.26, позволяющие наблюдать разрушение периодического решения при отсутствии периодических коррекций поддержания орбиты – в частности, заметно резкое возрастание по модулю компоненты θ_c по прошествии некоторого периода времени после коррекции. В отсутствие корректирующих импульсов квазипериодическое решение существует в течение примерно полутора периодов квазипериодической орбиты. Один период, который в случае квазипериодического движения можно определить как период времени между двумя последовательными пересечениями траекторией КА плоскости XZ от отрицательных значений y к положительным, составляет для исследуемого класса орбит около 180 суток.

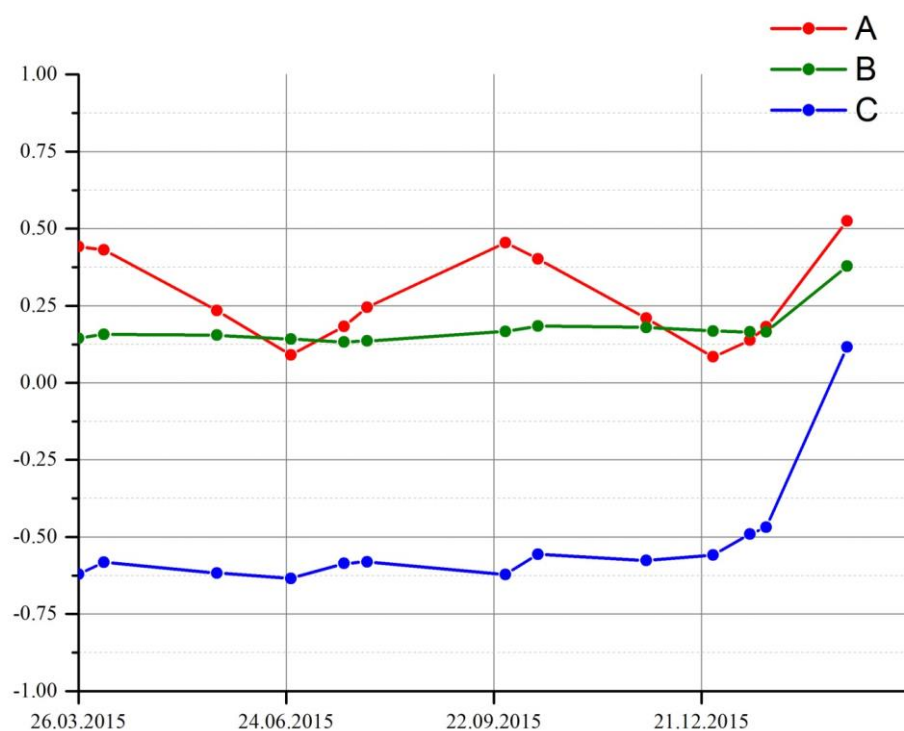


Рис 4.25 Эволюция безразмерных параметров $\theta_A, \theta_B, \theta_C$, характеризующих геометрию квазипериодической орбиты в случае пассивного движения по ней. Участок пассивного движения приведён после первой коррекции поддержания квазипериодической орбиты КА «Спектр-РГ»

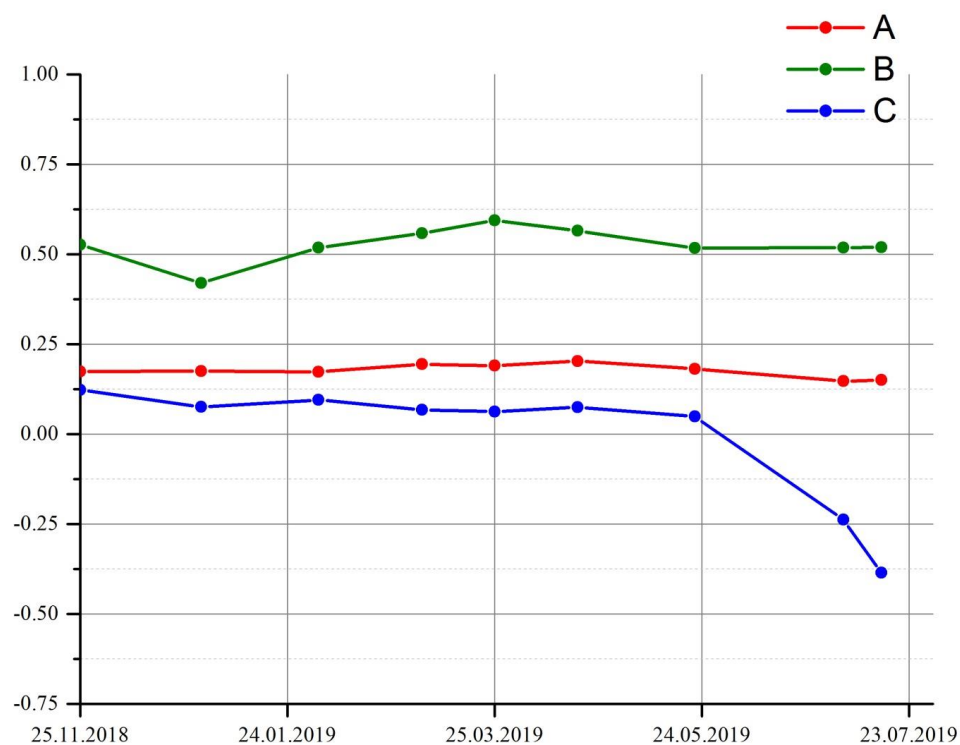


Рис. 4.26 Эволюция безразмерных параметров $\theta_A, \theta_B, \theta_C$, характеризующих геометрию квазипериодической орбиты в случае пассивного движения по ней. Участок пассивного движения приведён после первой коррекции поддержания квазипериодической орбиты КА «Спектр-М»

Глава 5

Исследование окон старта для миссий «Спектр-РГ» и «Миллиметрон»

5.1. Ограничения, наложенные на траектории и ориентацию космических аппаратов «Спектр-РГ» и «Спектр-М»

Глава посвящена вопросу выбора оптимальной даты старта для формирования соответствующей требованиям научного эксперимента рабочей орбиты КА «Спектр-РГ» и КА «Спектр-Миллиметрон». Проведённый анализ позволил сделать вывод о наличии зависимости суммарных затрат характеристической скорости на формирование и поддержание квази гало-орбиты от даты старта. Возможность для перелёта в окрестность коллинеарной точки либрации L_2 и выхода на произвольную квазипериодическую орбиту в её окрестности существует ежедневно. Однако на траектории перелёта и квазипериодические орбиты наложены следующие ограничения:

- траектория перелёта должна проходить над северным полушарием (в положительном направлении по оси OZ эклиптической СК) для обеспечения возможности проведения траекторных измерений с наземных станций, расположенных в северном полушарии, на этапе перелёта к точке либрации;
- необходимо обеспечить ежедневную видимость КА с российских станций слежения, расположенных в Медвежьих Озёрах и на Байконуре, в течение срока активного существования КА для проекта «Спектр-РГ», для проекта «Миллиметрон» данное ограничение не накладывается;
- время пребывания КА в тени и полутени Земли не должно превышать двух часов для КА «Спектр-РГ» и «Спектр-М».

Для обеспечения заданных условий проекция траектории КА «Спектр-РГ» на плоскость YZ , ортогональную эклиптике, должна находиться в кольце с центром в точке L_2 . Внутренний радиус этого кольца обусловлен исключением ситуаций попадания в полутень Земли. Внешний радиус кольца ограничен условием видимости со станций слежения, расположенных в северном полушарии Земли. Наиболее благоприятные возможности видимости со станций слежения в северном полушарии имеют место тогда, когда максимальное удаление от плоскости эклиптики приходится на эпоху весеннего или осеннего равноденствия.

Траектория КА «Миллиметр» имеет те же ограничения, за исключением необходимости обеспечения видимости КА с наземных станций слежения, расположенных в северном полушарии при движении по квазипериодической орбите – ввиду выбора для данного проекта квази гало-орбит большой амплитуды в плоскости, ортогональной эклиптике, соблюдение данного условия невозможно. Для обеспечения управления аппаратом и проведения траекторных измерений в проекте «Миллиметр» необходимо привлечение станции в южном полушарии.

Специфическая геометрия квази-гало орбиты КА «Спектр-М» накладывает строгие ограничения на выбор даты старта. В частности, описанный в разделах 2.3, 3.1 алгоритм не позволяет найти траектории перелёта на выбранный класс орбит для дат с ноября по февраль, в то время как переход на орбиты с меньшим выходом из плоскости эклиптики, предложенные для КА «Спектр-РГ», возможен для любой даты старта.

В результате проведённого анализа установлено, что для исследуемых в работе классов квазипериодических орбит наблюдается асимметрия в распределении низкоэнергетичных траекторий по датам старта в течение года. Энергоэффективность рассчитанных решений определяется суммой импульсов коррекций поддержания квазипериодических орбит, включающей первую коррекцию в момент перехода с траектории перелёта на квазипериодическую орбиту.

Получение карты решений, отражающей годовое временное распределение рассчитанных решений и их энергоэффективность, является ресурсоемким процессом. Массовый расчёт вариантов решений для различных дат перехода с орбиты выведения на траекторию перелёта к точке либрации был осуществлен с помощью распараллеливания вычислений на восьмиядерном сервере.

5.2. Результаты расчёта окон старта для миссии «Спектр-РГ»

Переход на траекторию перелёта на выбранный для проекта «Спектр-РГ» класс квазипериодических орбит с амплитудами, задаваемыми коэффициентами $\theta_A = 0.18$, $\theta_B = 0.1524$, $\theta_A = 0.19$, $\theta_B = 0.1538$, $\theta_A = 0.20$, $\theta_B = 0.1552$ в окрестности точки либрации возможен ежедневно. Для периода с 15 марта 2016 г по 15 марта 2017 г была построена карта решений, отражающая возможности для запуска КА и затраты характеристической скорости на поддержание квазипериодической орбиты в указанном диапазоне дат (см. рис. 5.1). По оси абсцисс отложена дата, по оси ординат – время перехода с орбиты выведения на траекторию перелёта в окрестность точки либрации по шкале декретного московского времени (ДМВ). Цветом маркируются затраты характеристической скорости ΔV на поддержание квазипериодической орбиты для

данного решения, значения приведены в м/с. На данной карте отображены все решения (общее количество 6169), полученные для указанных параметров θ_A, θ_B . Анализ данной карты позволяет сделать вывод о целесообразности запуска КА «Спектр-РГ» в диапазоне дат с середины марта по конец августа. Пик плотности энергоэффективных траекторий приходится на окрестность даты летнего солнцестояния.

Также была построена карта временного распределения значений первых импульсов коррекций поддержания квазипериодической орбиты (см. рис. 5.2). Данное распределение имеет прямую корреляцию с временным распределением суммарных затрат характеристической скорости, что подтверждает вывод об определяющем влиянии величины первого импульса коррекции на суммарные затраты характеристической скорости на поддержание квазипериодической орбиты, сделанный в главе 4.

В рамках анализа причин неоднородности временного распределения энергоэффективных траекторий было рассчитано эклиптическое наклонение для каждой траектории перелёта (см. рис. 5.3). Эклиптическое наклонение траектории перелёта при заданной широте точки старта определяется как датой старта (сезоном), так и временем старта (вследствие суточного вращения Земли). Для выбранной широты старта (выведение КА планируется с космодрома Байконур) эклиптическое наклонение орбиты выведения, и, как следствие, орбиты перелёта, варьируется в диапазоне от 27.9° до 74.9° . Временное распределение значений эклиптического наклонения траекторий перелёта показало отсутствие прямой корреляции между значением первого импульса коррекции поддержания квазипериодической орбиты и наклонением траектории перелёта на неё. Отсутствие прямой зависимости можно объяснить исходя из следующих геометрических соображений: переход на квази гало-орбиту с небольшой амплитудой в плоскости, ортогональной эклиптике, возможен с помощью траектории перелёта как с малым, так и со средним значением эклиптического наклонения.

Для уменьшения сезонной зависимости затрат характеристической скорости на формирование квазипериодической орбиты в окрестности точки либрации от даты старта можно использовать околоэкваториальные орбиты выведения. Использование космодрома, расположенного вблизи экватора, как, например, Гвианский космический центр, расположенный во Французской Гвиане ($5^\circ 10'$ с.ш.), позволяет формировать орбиты выведения с небольшим значением эклиптического наклонения (в диапазоне от $18^\circ 16'$ до $28^\circ 36'$). Запуск КА “Gaia” 19 декабря 2013 г был осуществлён с данного космодрома [Renk, 2014], проект “James Webb Space Telescope” – запуск КА НАСА в окрестность либрационной точки L_2 также предполагает использование стартовой площадки Гвианского космического центра [Yu, 2014].

Построенная карта решений также позволяет определить продолжительность окон старта в течение суток. Для миссии «Спектр-РГ» ежедневно наблюдается 2 окна старта, каждое имеет продолжительность около 3 часов.

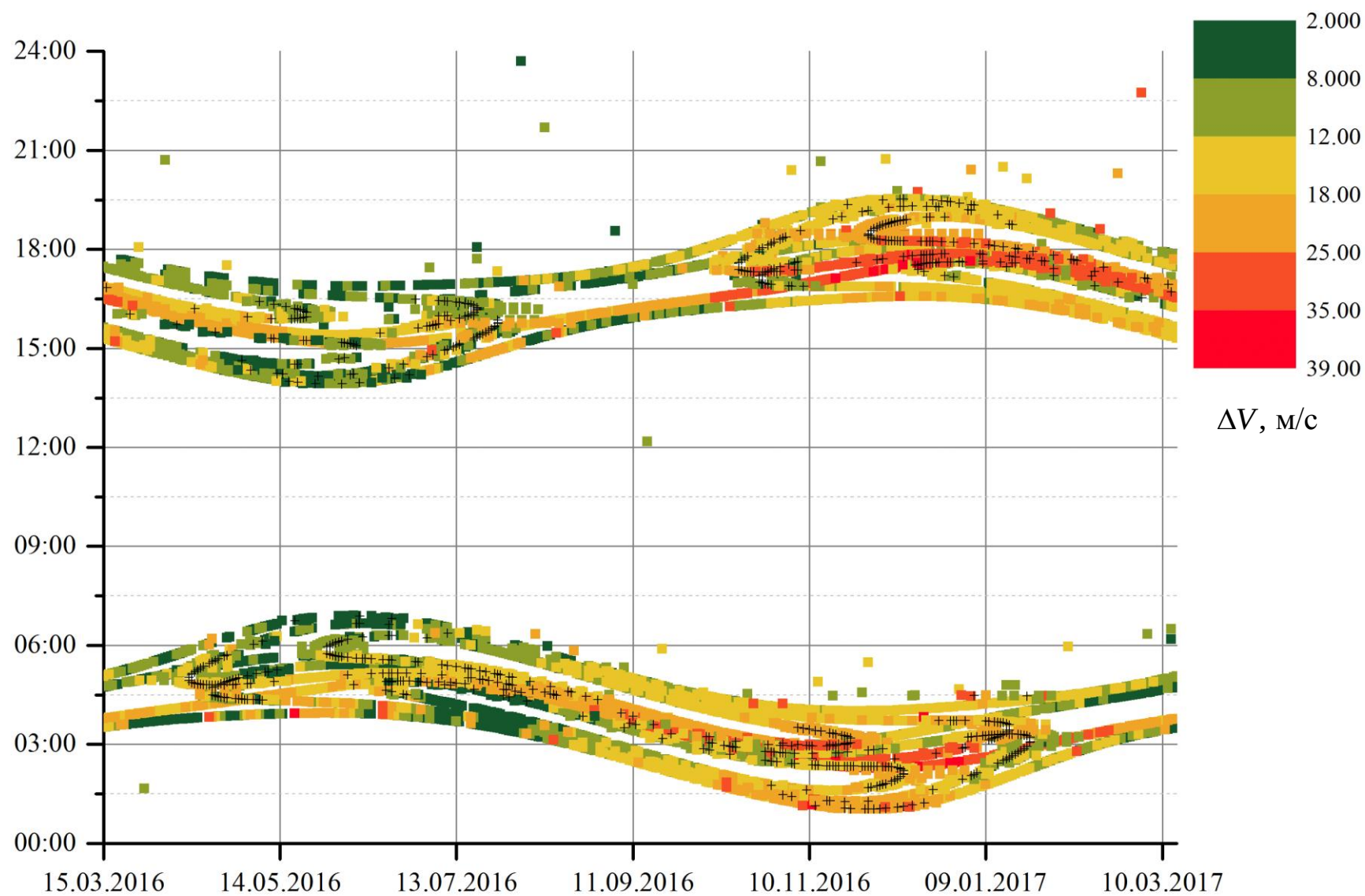


Рис. 5.1 Карта решений для выбранных параметров квазипериодической орбиты КА «Спектр-РТ» на период с 15.03.2016 по 15.03.2017.

По оси абсцисс отложена дата перехода на траекторию перелёта, по оси ординат – время

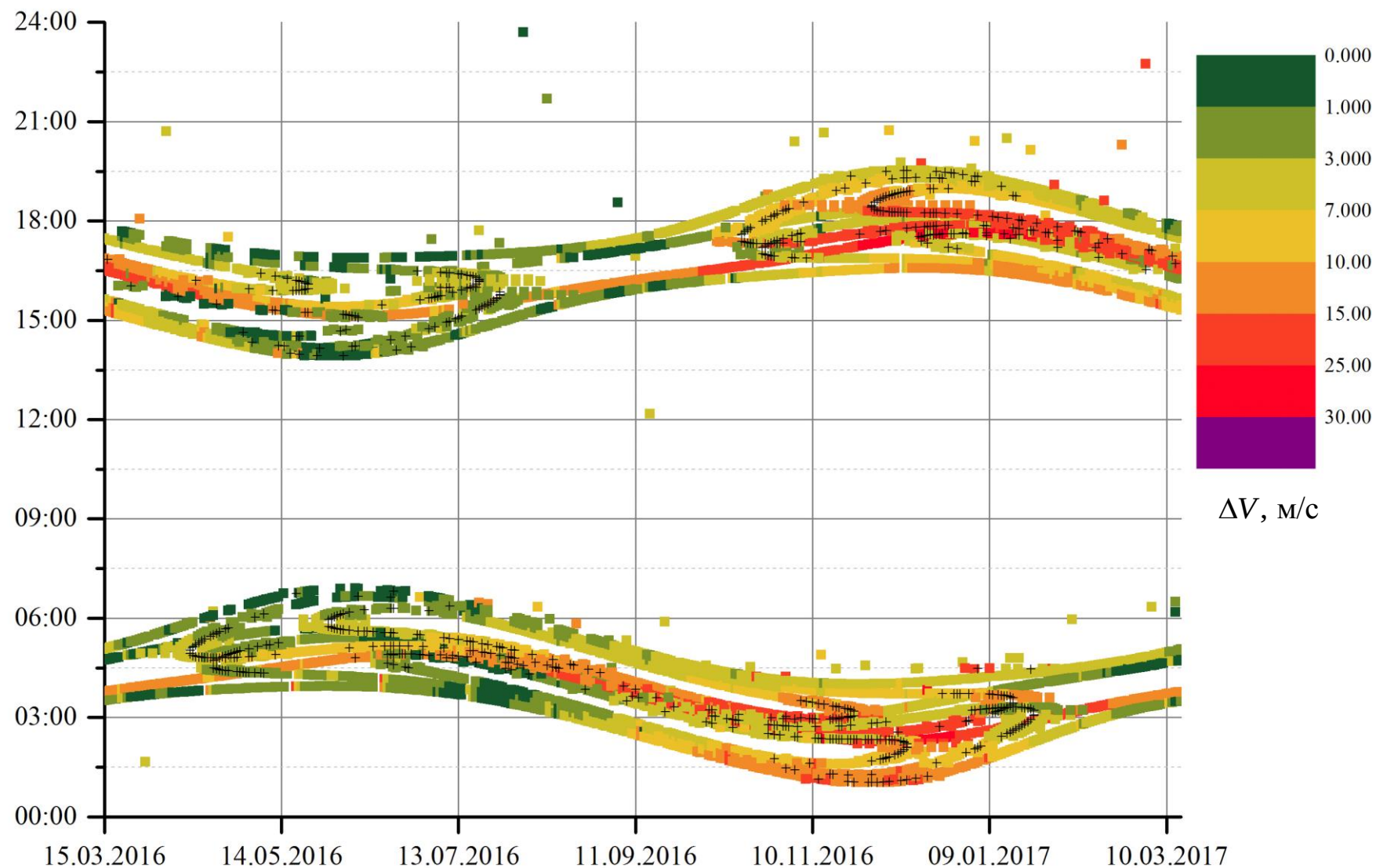


Рис. 5.2 Временное распределение значений импульсов первой коррекции для выбранных параметров квазипериодической орбиты КА «Спектр-РГ» на период с 15.03.2016 по 15.03.2017. По оси абсцисс отложена дата перехода на траекторию перелёта, по оси ординат – время

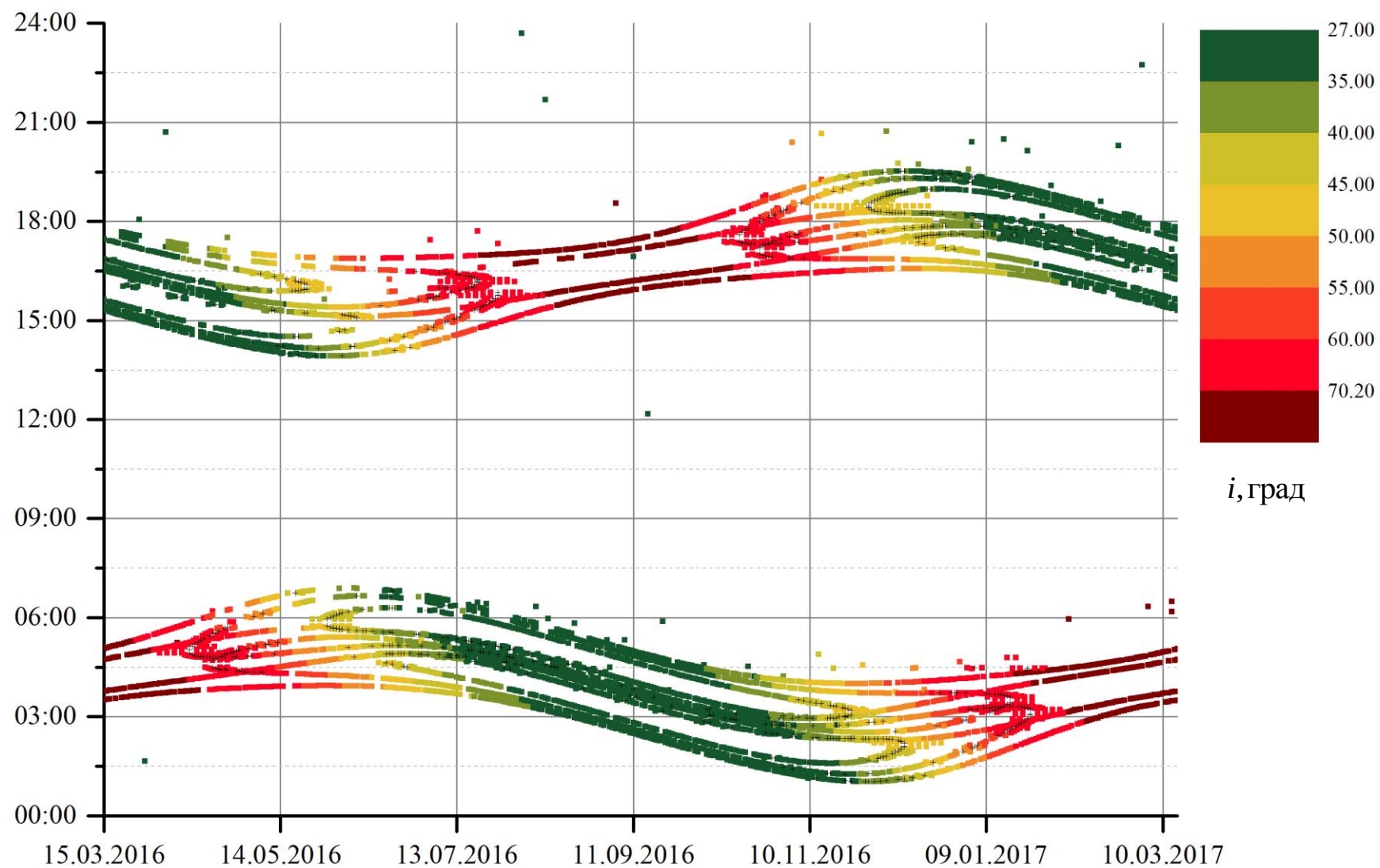


Рис. 5.3 Временное распределение значений эклиптического наклона траектории перелёта для выбранных параметров квазипериодической орбиты КА «Спектр-РГ» на период с 15.03.2016 по 15.03.2017.
По оси абсцисс отложена дата перехода на траекторию перелёта, по оси ординат – время

5.3. Результаты расчёта окон старта для миссии «Миллиметр»

Для класса квази гало-орбит с большим выходом из плоскости эклиптики, заданных коэффициентами $\theta_A = 0.2$, $\theta_B = 0.85$, была построена карта решений на 2019 год, содержащая 2005 траекторий (рис. 5.4). Карта решений также демонстрирует неоднородность временного распределения энергоэффективных траекторий – наименьшим затратам характеристической скорости соответствуют даты старта в диапазоне с июня по октябрь. Временное распределение значений первого импульса коррекции поддержания квазипериодической орбиты (см. рис. 5.5) соответствует распределению энергоэффективных траекторий, что подтверждает вывод об определяющем влиянии величины первого импульса коррекции на суммарные затраты характеристической скорости на поддержание квазипериодической орбиты, сделанный в главе 4. Анализ временного распределения значений эклиптического наклона построенных траекторий перелёта (см. рис. 5.6) позволяет сделать вывод о наличии прямой зависимости между значением импульса первой коррекции и эклиптическим наклоном траектории перелёта на квази гало-орбиту – минимальные значения импульсов первой коррекции соответствуют большим эклиптическим наклонам траектории перелёта при старте с околоземной орбиты с 16:30 до 19:30 часов в летние и осенние месяцы. Найденная зависимость имеет простое геометрическое объяснение: переход на квази гало-орбиту с большим выходом из плоскости эклиптики происходит обычно через полувиток (см. рис. 4.1 – 4.8) в верхней или нижней точке квазипериодической орбиты, соответственно траектория перелёта должна иметь достаточное наклонение, чтобы в точке перехода обеспечивался выход траектории из плоскости эклиптики на расстояние порядка 1 млн км.

Анализ построенной карты решений позволяет определить окно старта КА «Спектр-М» следующим образом: запуск КА целесообразно производить во второй половине 2019 года – в диапазоне дат с 15.06.2019 по 28.10.2019, выведение КА на траекторию перелёта к точке либрации следует выполнять в вечерние часы – с 16:30 до 19:30 ДМВ.

С целью установления систематического характера полученного распределения для временного интервала с 01.01.2019 по 31.12.2025 также была построена карта решений, отражающая возможности для запуска КА и затраты характеристической скорости на поддержание квазипериодической орбиты в указанном диапазоне дат (см. рис. 5.7). В связи с ресурсоемкостью проведения вычислений на каждую дату для выбранного диапазона расчёт траекторий производился только для 1 и 15 чисел каждого месяца.

Таким образом, была образована равномерная сетка с шагом 15 суток на временном интервале 7 лет. В результате для 84 дат было получено 904 решения. Значения параметров θ_A, θ_B остались неизменными.

Построенная карта решений позволяет сделать вывод о систематическом характере зависимости затрат характеристической скорости на поддержание квазипериодической орбиты с заданными параметрами от даты перехода на траекторию перелёта в окрестность точки либрации. Данные моделирования демонстрируют предпочтительность траекторий перелёта в окрестность точки L_2 в период, когда эклиптическое наклонение траектории перелёта лежит в диапазоне от 51.4° до 74.9° .

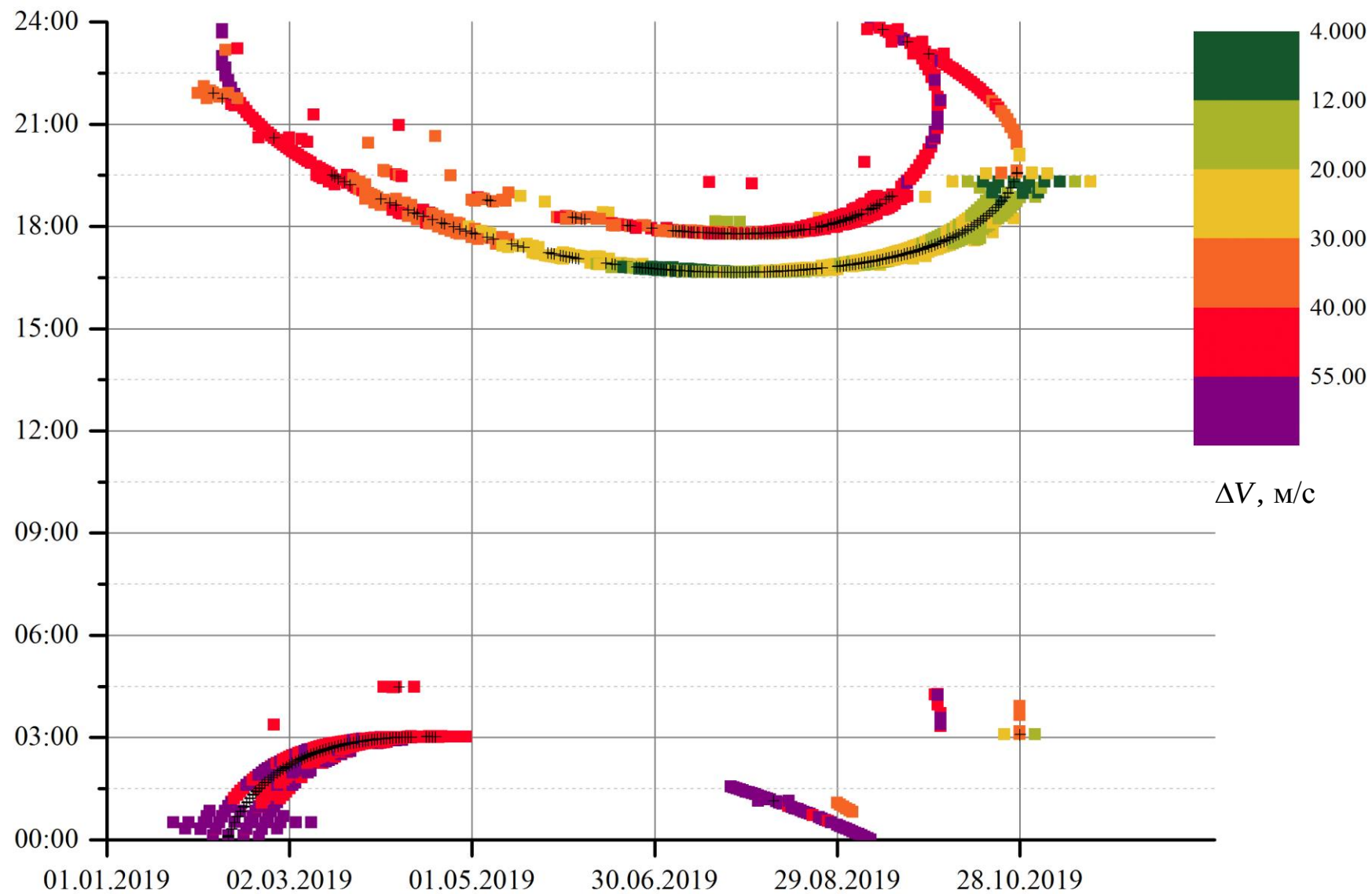


Рис. 5.4 Карта решений для выбранных параметров квазипериодической орбиты КА «Спектр-М» на 2019 г.
По оси абсцисс отложена дата перехода на траекторию перелёта, по оси ординат – время

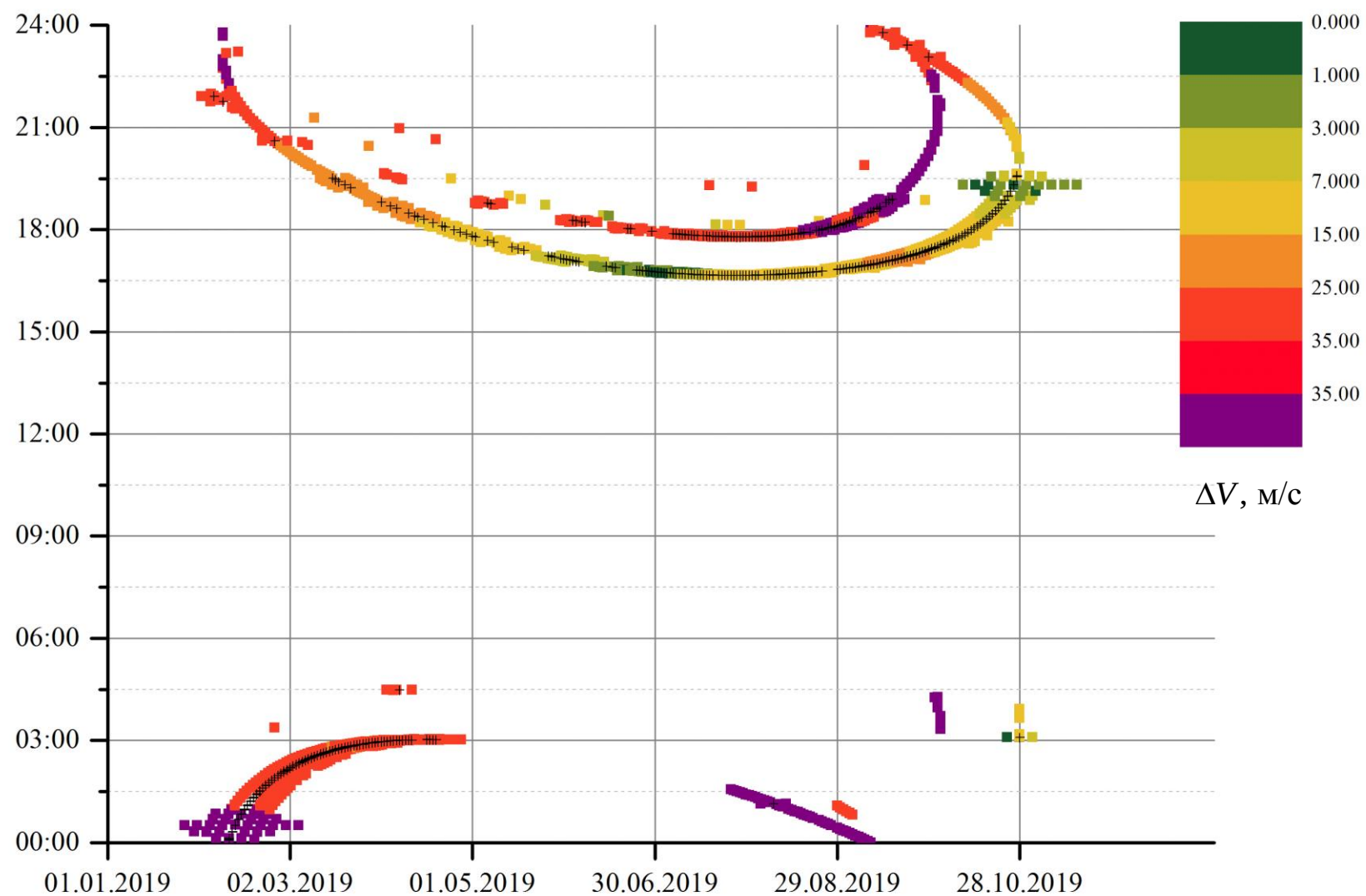


Рис. 5.5 Временное распределение значений импульсов первой коррекции для выбранных параметров квазипериодической орбиты КА «Спектр-М» на 2019 г. По оси абсцисс отложена дата перехода на траекторию перелёта, по оси ординат – время

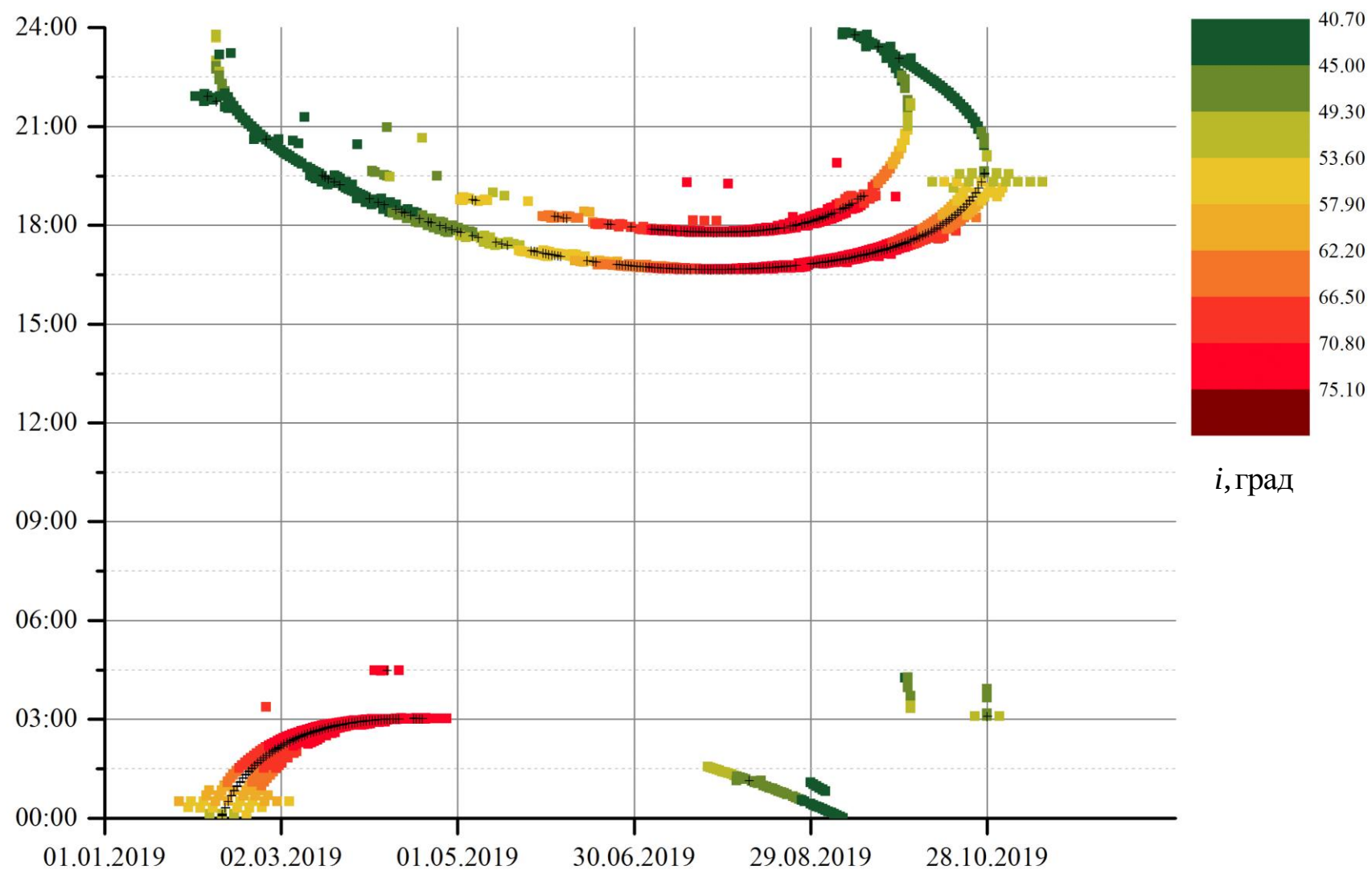


Рис. 5.6 Временное распределение значений эклиптического наклона траектории перелёта для выбранных параметров квазипериодической орбиты КА «Спектр-М» на 2019 г.

По оси абсцисс отложена дата перехода на траекторию перелёта, по оси ординат – время

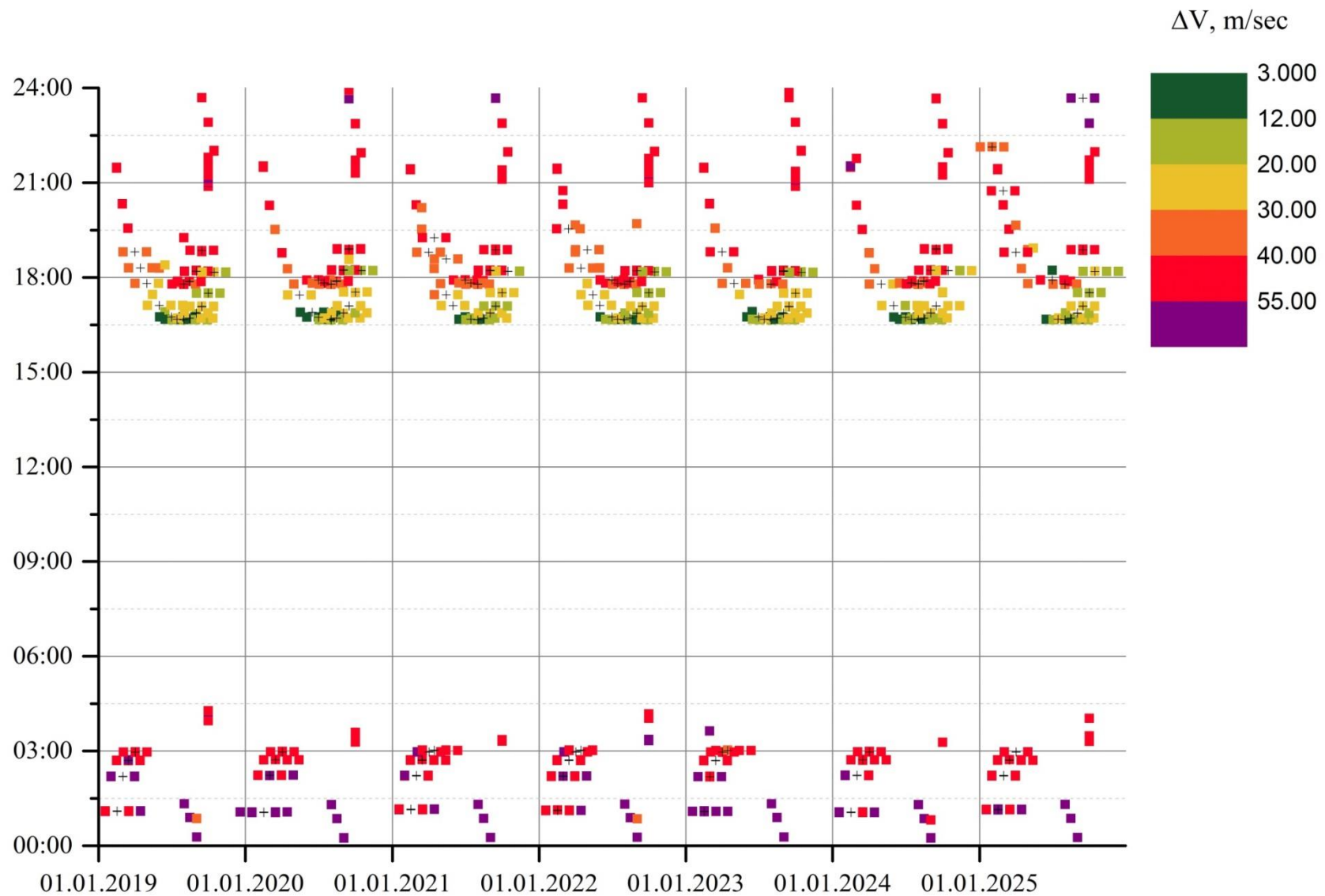


Рис. 5.7 Карта решений для выбранных параметров квазипериодической орбиты КА «Спектр-М» на 2019-2025 г.
По оси абсцисс отложена дата перехода на траекторию перелёта, по оси ординат – время

Глава 6

Исследование влияния ошибок выведения и ошибок исполнения манёвров космического аппарата на реализацию миссии

Предыдущее изложение описывало моделирование траекторий движения КА на участке перелёта и движения по квазипериодической орбите в окрестности точки L_2 без учёта ошибок выведения КА разгонным блоком на орбиту перелёта и ошибок исполнения манёвров коррекции орбиты, а также в предположении идеальной навигации.

Данная глава содержит два раздела: в первом разделе приводятся результаты расчёта коррекций на траектории перелёта, парирующих предполагаемые ошибки выведения КА разгонным блоком; второй раздел содержит результаты расчёта коррекций поддержания квазипериодической орбиты в окрестности точки либрации с учётом ошибок исполнения манёвров.

6.1. Корректирующие импульсы на этапе перелёта

Методом статистических испытаний было проведено моделирование ошибок выведения КА разгонным блоком на траекторию перелёта к точке L_2 и выполнена оценка затрат характеристической скорости на выполнение коррекций на участке перелёта, позволяющих парировать ошибки выведения. Исходные данные по ошибкам выведения и ошибкам исполнения импульсов коррекций для моделирования представлены в таблице 6.1. Для их исправления на траектории перелёта целесообразно планировать проведение 4-х коррекций: на 10-е, 20-е, 30-е и 100-е сутки полёта. Интервал в 10 суток между коррекциями обусловлен необходимостью накопления мерной базы, достаточной для определения параметров движения КА с необходимой точностью.

Таблица 6.1 Ошибки выведения КА на траекторию перелёта

Ракета-носитель	Зенит-2СБ
Разгонный блок	Фрегат-СБ
Высота апоцентра h_a	± 120000 км
Высота перицентра h_p	± 12 км
Аргумент перигея ω	$\pm 24'$
Долгота восходящего узла Ω	$\pm 10'$
Наклонение i	$\pm 5'$

Ошибка исполнения импульса коррекции складывается из ошибок исполнения по модулю и направлению импульса. Ошибка исполнения по модулю определяется возможностями системы управления КА. Если в состав системы управления входят акселерометры, то отключение работы двигательной установки (ДУ) производится по набору характеристической скорости. Если акселерометры в состав системы управления не входят, отключение работы ДУ производится по времени. При отключении работы ДУ по времени ошибка исполнения по модулю составляет примерно 10%. При отключении работы ДУ по набранной характеристической скорости ошибка по модулю на порядок меньше. Поэтому в разделе представлены результаты двух вариантов оценок затрат характеристической скорости на коррекции, выполняемые на участке перелёта: с использованием и без использования акселерометров.

Ошибка выдачи импульса по направлению определяется, в основном, погрешностями углоизмерительных каналов бесплатформенных инерционных блоков (БИБ) и точностью их привязки к инерциальному пространству:

$$\Delta\varphi = \sqrt{(\Delta\varphi_0)^2 + (\omega_N t_k)^2 + (\Delta\varphi_A)^2 + (\Delta\varphi_D)^2}, \quad (6.1)$$

где

$\Delta\varphi_0$ – погрешность начальной ориентации в инерциальном пространстве, 10 угл. мин;

ω_N – случайный “уход” углоизмерительных каналов БИБ;

t_k – номинальная длительность работы двигателя;

$\Delta\varphi_A$ – погрешность знания ориентации акселерометров относительно углоизмерительных каналов, 0.5 угл. мин;

$\Delta\varphi_D$ – средняя за режим динамическая ошибка автомата стабилизации, 0.5 угл. мин.

Ошибка выдачи импульса в поперечном направлении вычисляется по формуле:

$$\Delta|\vec{v}_n| = w\Delta\varphi,$$

где w – величина импульса скорости.

Ошибка исполнения импульса по модулю определяется, в основном, точностными характеристиками акселерометра и вычисляется по формуле:

$$\Delta|\vec{v}_M| = \sqrt{(k_M w)^2 + (t_k \Delta w_0)^2 + (at_{БЦВМ})^2 + D_a^2 + (\Delta w_{ИПД})^2}, \quad (6.2)$$

где

k_M – отклонение масштабного коэффициента акселерометра от номинала, не превосходит 0.05%;

t_k – номинальная длительность работы двигателя;

Δw_0 – нулевой сигнал акселерометра при отсутствии ускорения;

a – ускорение, создаваемое двигателем;

$t_{БЦВМ}$ – такт работы бортовой цифровой вычислительной машины (БЦВМ), 0.05 с;

D_a – дискретность выходной информации акселерометра, 0.005 м/с;

$\Delta w_{импд}$ – разброс импульса последействия двигателя коррекции.

Для малых коррекций, где переходные процессы еще не завершены, динамическую ошибку следует учитывать, а для длительной работы двигателя коррекции переходные процессы практически завершаются и динамическую составляющую ошибки можно не учитывать.

Расчёты, выполненные по формулам (6.1) и (6.2) при значениях ω_N 0.5 град/час и Δw_0 0.0005 м/с, показали, что погрешность исполнения импульса по направлению не превосходит 15 угловых минут, а по модулю 1 процента от величины импульса. При этих предположениях выполнена оценка затрат характеристической скорости на коррекции и манёвры при использовании акселерометров.

Результаты статистического моделирования для коррекций на траектории перелёта представлены в таблицах 6.2, 6.3. На рис. 6.1, 6.3 представлены гистограммы распределения значений импульсов первой и второй коррекций на траектории перелёта для КА «Спектр-РГ», позволяющие оценить вероятность реализации различных сценариев. На рис. 6.2, 6.4 приведены гистограммы распределения интервалов времени пребывания в окрестности точки либрации заданного радиуса после выполнения коррекций на траектории перелёта, позволяющие оценить качество первой и второй коррекций на траектории перелёта. На рис. 6.5-6.8 представлены аналогичные данные для КА «Спектр-М».

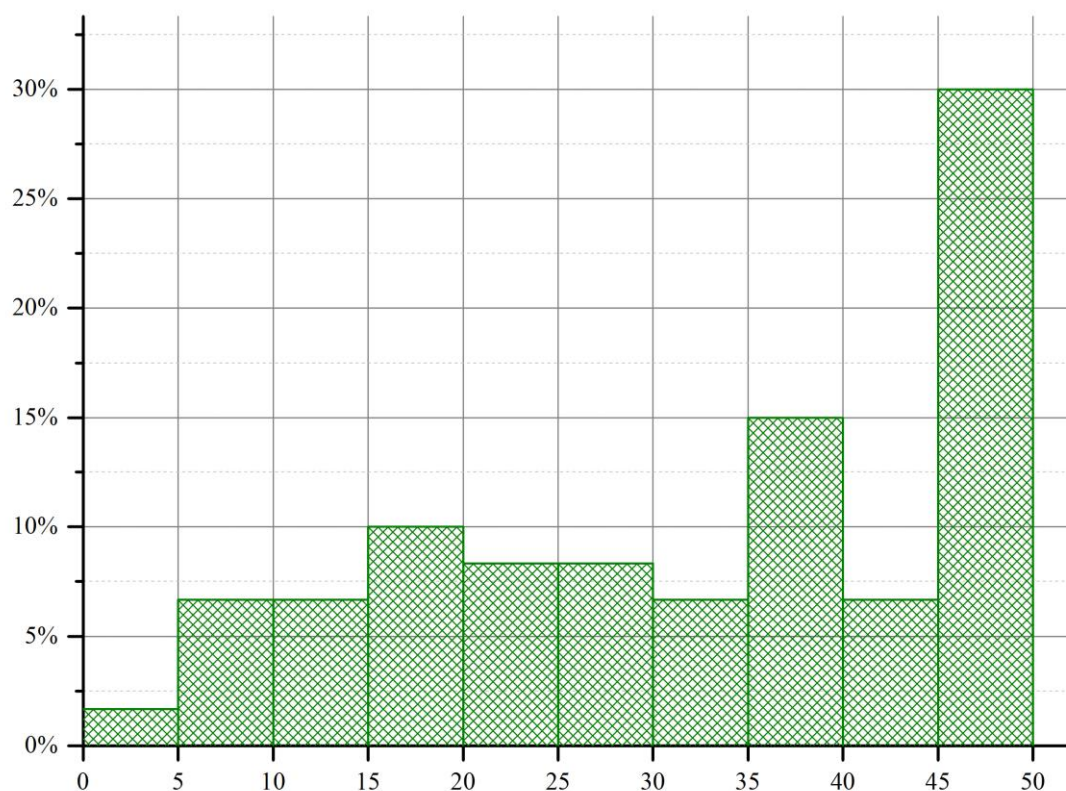


Рис. 6.1 Гистограмма распределения значений импульса первой коррекции на траектории перелёта для КА «Спектр-РГ». Значения импульса на оси абсцисс приведены в м/с

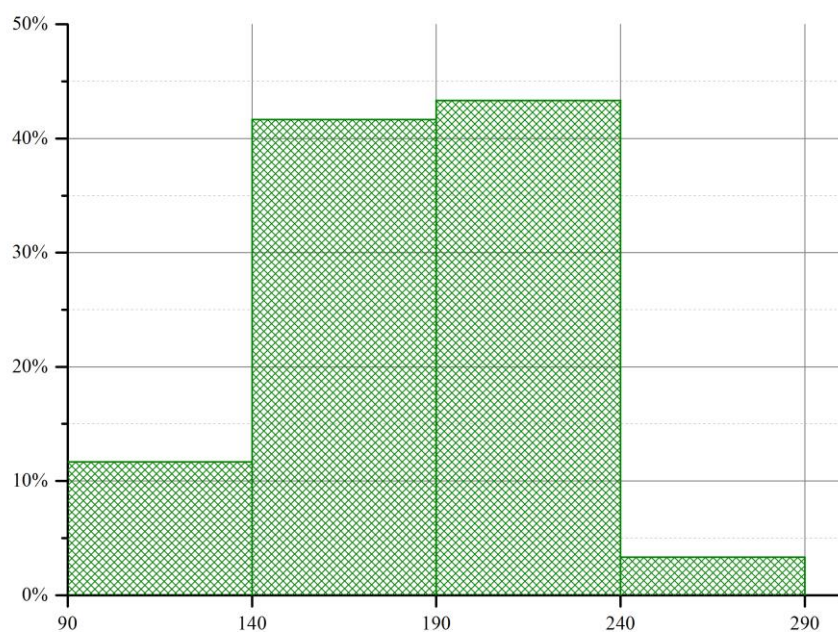


Рис. 6.2 Гистограмма распределения продолжительности пребывания КА «Спектр-РГ» в заданной окрестности точки L_2 (приведена в сутках) после первой коррекции на траектории перелёта

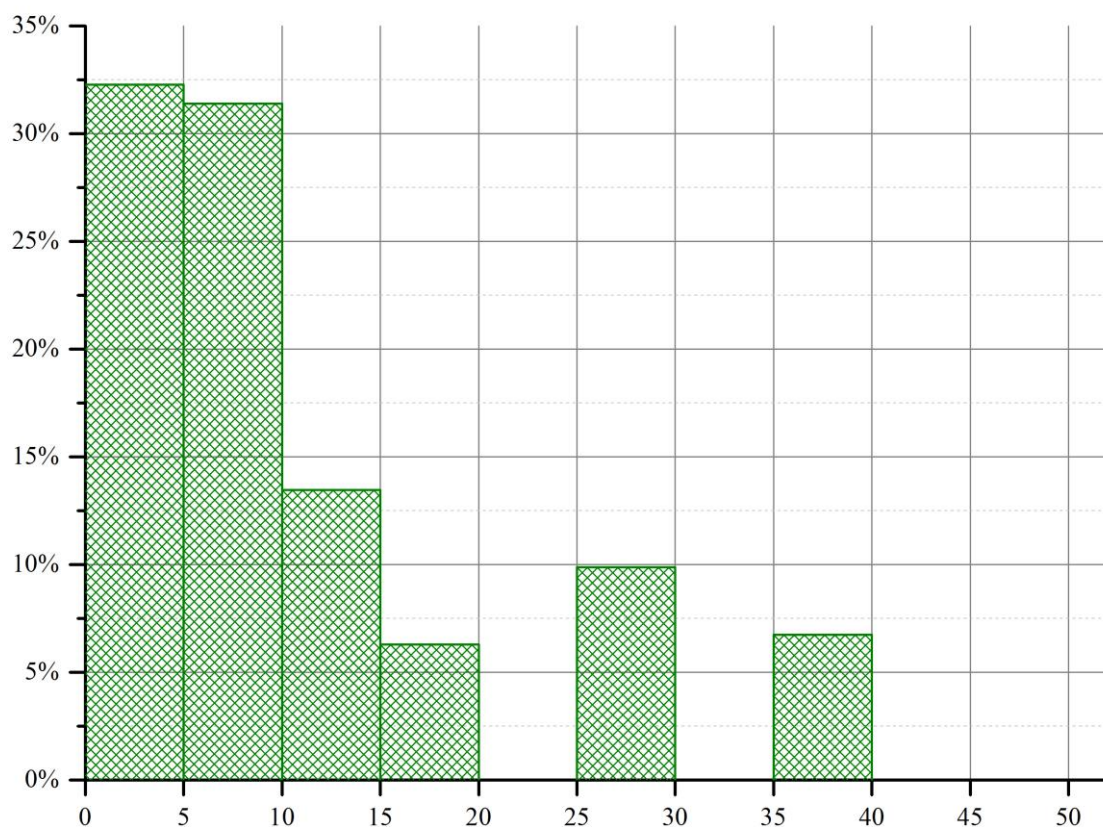


Рис. 6.3 Гистограмма распределения значений импульса второй коррекции на траектории перелёта для КА «Спектр-РГ». Значения импульса на оси абсцисс приведены в м/с

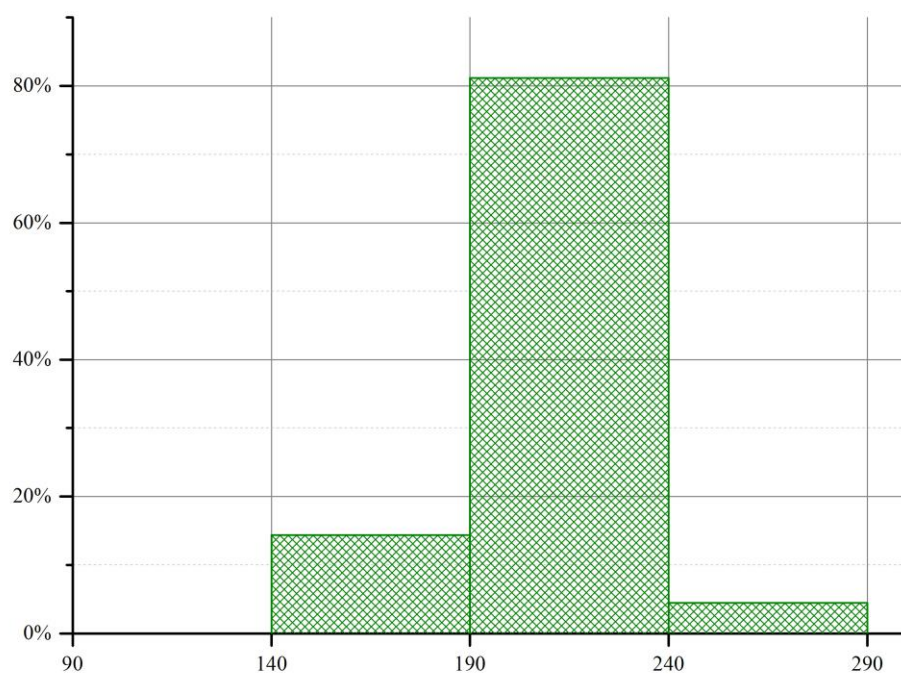


Рис. 6.4 Гистограмма распределения продолжительности пребывания КА «Спектр-РГ» в заданной окрестности точки L_2 (приведена в сутках) после второй коррекции на траектории перелёта

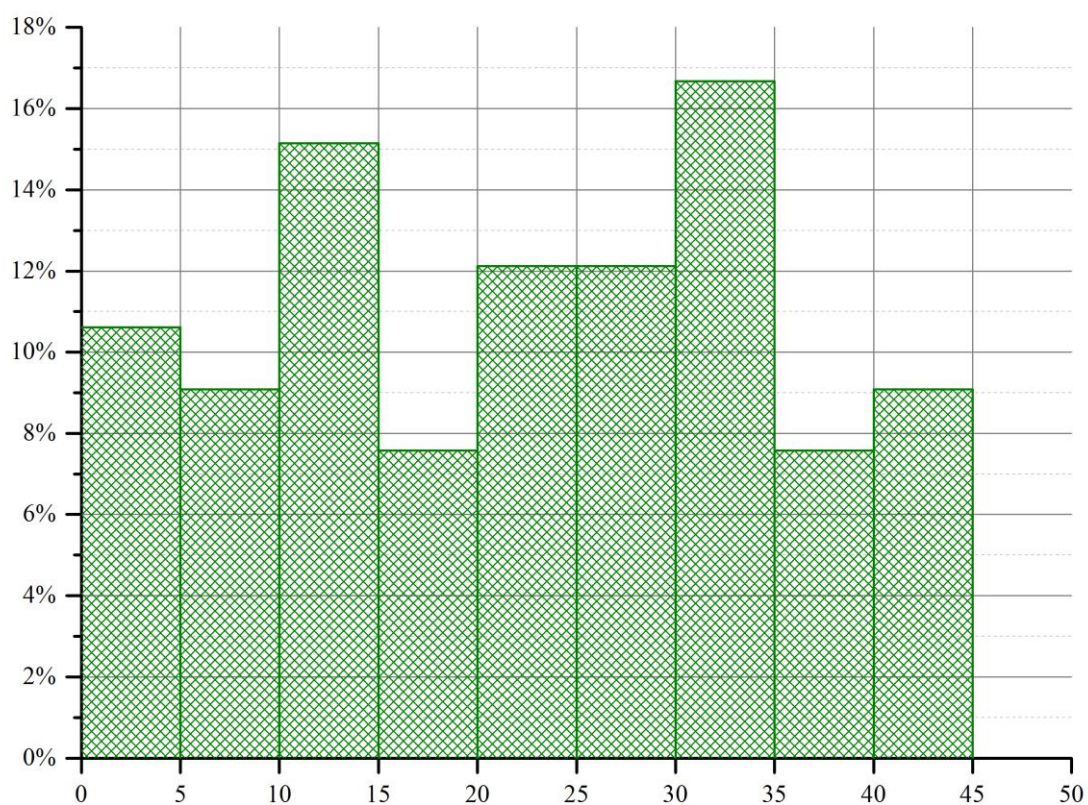


Рис. 6.5 Гистограмма распределения значений импульса первой коррекции на траектории перелёта для КА «Спектр-М». Значения импульса на оси абсцисс приведены в м/с

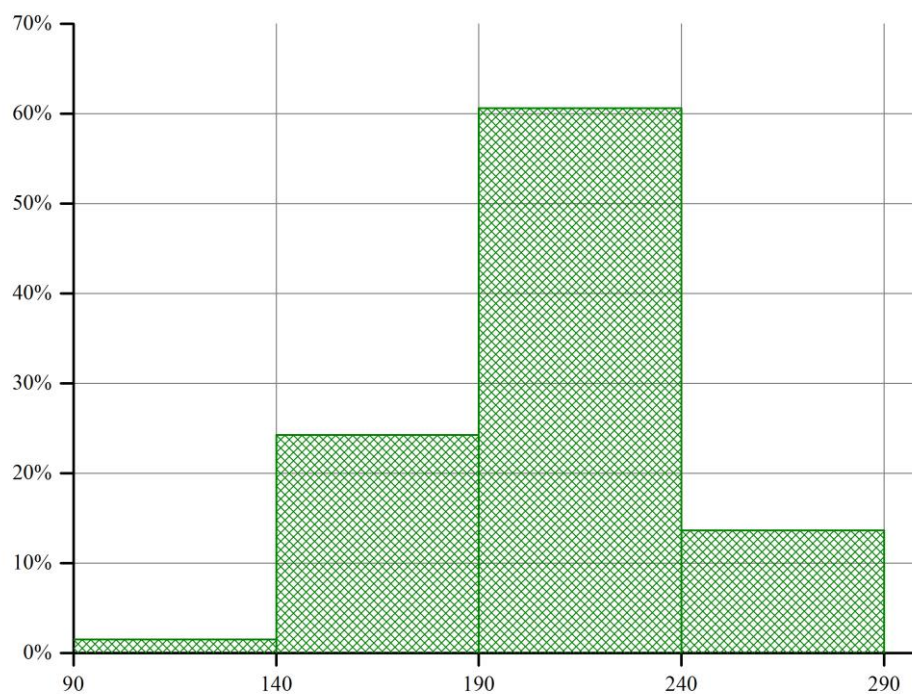


Рис. 6.6 Гистограмма распределения продолжительности пребывания КА «Спектр-М» в заданной окрестности точки L_2 (приведена в сутках) после первой коррекции на траектории перелёта

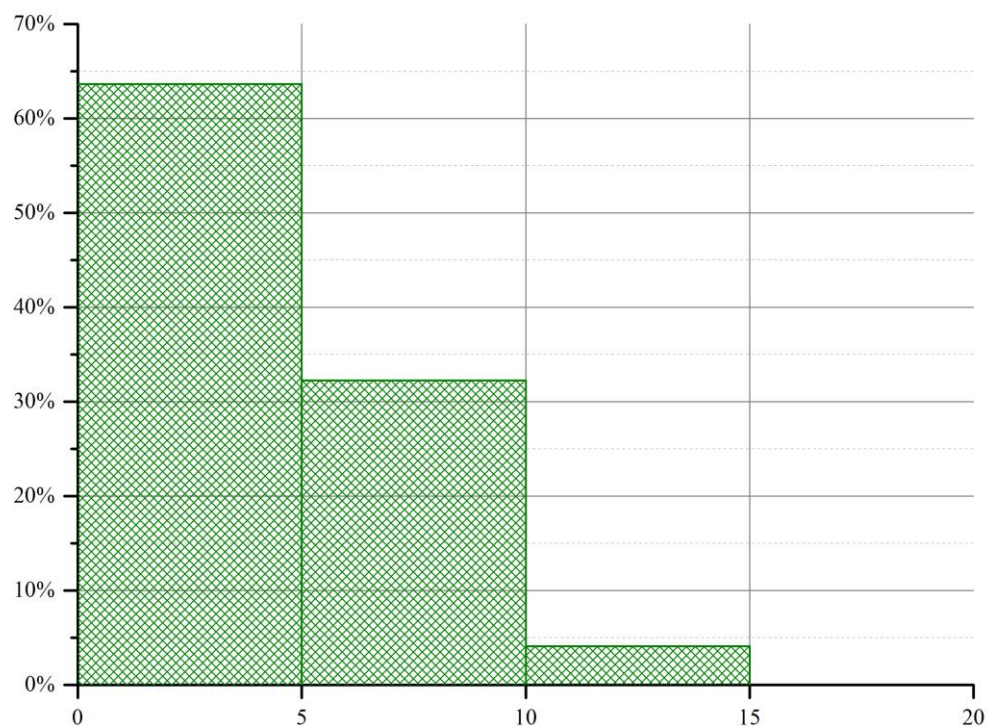


Рис. 6.7 Гистограмма распределения значений импульса второй коррекции на траектории перелёта для КА «Спектр-М». Значения импульса на оси абсцисс приведены в м/с

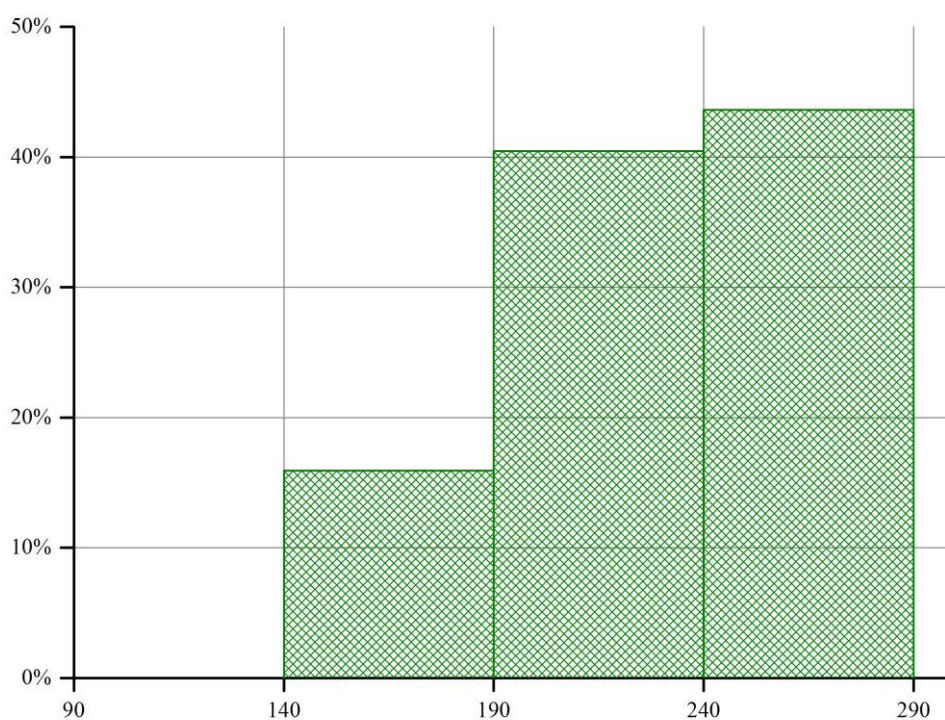


Рис. 6.8 Гистограмма распределения продолжительности пребывания КА «Спектр-М» в заданной окрестности точки L_2 (приведена в сутках) после второй коррекции на траектории перелёта

Таблица 6.2 Корректирующие импульсы на этапе перелёта в условиях отсутствия акселерометров

Миссия	Спектр-РГ		Спектр-М	
	Средн, м/с	Макс, м/с	Средн, м/с	Макс, м/с
1 ^{ый} МКТП	32.7	49.5	22.2	43.8
2 ^{ой} МКТП	11.0	37.4	3.3	13.5
3 ^{ьей} МКТП	1.8	6.5	0.4	1.6
4 ^{ьей} МКТП	1.7	14.2	1.4	3.0
Суммарные затраты ΔV	47.2	107.6	27.3	61.9

Примерно в 50% случаев после выполнения второй коррекции длительность пребывания КА в окрестности точки L_2 превосходит 240 суток, что снимает необходимость проведения третьей и четвёртой коррекция на траектории перелёта.

Таблица 6.3 Корректирующие импульсы на этапе перелёта при наличии акселерометров

Миссия	Спектр-М	
	Средн, м/с	Макс, м/с
1 ^{ый} МКТП	22.2	43.8
2 ^{ой} МКТП	0.8	8.5
3 ^{ьей} МКТП	0.1	0.8
4 ^{ьей} МКТП	1.2	1.6
Суммарные затраты ΔV	24.3	54.7

Статистические характеристики импульсов первой коррекции такие же, как и для случая работы без использования акселерометров, так как величина первой коррекции определяется ошибками выведения ракетой-носителем и разгонным блоком.

Примерно в 90% случаев после выполнения второй коррекции длительность пребывания КА в окрестности точки L_2 превосходит 240 суток, что снимает необходимость проведения третьей и четвёртой коррекция на траектории перелёта.

6.2. Корректирующие импульсы на этапе движения космического аппарата по квазипериодической орбите с учётом ошибок исполнения манёвров

При математическом моделировании полёта КА предполагалось, что ошибки исполнения импульса манёвра составляют 10% от его величины и 0.5° по его направлению.

Статистическое моделирование было выполнено для следующей схемы проведения манёвров КА на гало-орбите: начиная с момента выхода на квазипериодическую орбиту (100-е сутки полёта с момента старта из перицентра геоцентрической орбиты) каждые 45 суток (одна четвёртая часть периода орбиты) проверяется необходимость проведения манёвра. Необходимость проведения манёвра определяется продолжительностью существования КА в окрестности точки L_2 заданного радиуса до выполнения манёвра коррекции – если этот временной интервал превышает 270 суток, коррекция не проводится. Если необходимо, манёвр проводится. Так как в качестве оптимизируемого параметра взято время пребывания КА в заданной окрестности точки либрации после проведения коррекции (см. главу 4), этот параметр удобно использовать для описания качества полученного решения и проведённого манёвра коррекции.

Было выполнено статистическое моделирование расчётов манёвров по указанной схеме для поддержания решения на множестве квази гало-орбит с заданными амплитудами для КА «Спектр-РГ» и «Спектр-М» в течение 7.5 лет. При этом предполагалось, что после исполнения каждого очередного манёвра КА может перейти (из-за допустимых ошибок исполнения манёвра) на одну из множества квазипериодических орбит, принадлежащих центральному многообразию системы.

Результаты расчёта затрат характеристической скорости на проведение маневрирования КА «Спектр-РГ» и «Спектр-М» для поддержания квазипериодической орбиты заданной геометрии в окрестности либрационной точки L_2 в течение 7.5 лет приведены в таблице 6.4. В диаграмме, представленной на рис. 6.2, показаны средние и максимальные затраты характеристической скорости по каждому манёвру для КА «Спектр-РГ» в случае отсутствия акселерометров для контроля величины выданного импульса. В диаграммах на рис. 6.3, 6.4 представлены средние и максимальные значения импульсов коррекций поддержания орбиты КА «Спектр-М» в отсутствие и при наличии в контуре управления ДУ КА акселерометров. Моделирование корректирующих импульсов с учётом ошибок исполнения при наличии акселерометров на борту КА «Спектр-РГ» для контроля величины выдаваемого импульса не проводилось, так как тяга, создаваемая

двигательной установкой КА «Спектр-РГ» имеет тот же порядок значения, что и погрешность производимых на сегодняшний день отечественных акселерометров. Двигательная установка КА «Спектр-М» обладает другими тяговыми характеристиками, что позволяет контролировать выданный импульс с помощью акселерометров, размещаемых в контуре управления двигательной установкой КА.

Таблица 6.4 Суммарные значения затрат характеристической скорости на поддержание квазипериодической орбиты заданной геометрии

КА	Без акселерометров		С акселерометрами	
	Средние затраты ΔV , м/с	Максимальные затраты ΔV , м/с	Средние затраты ΔV , м/с	Максимальные затраты ΔV , м/с
Спектр-РГ	71.3	190.5	–	–
Спектр-М	43.2	173.1	17.0	60.0

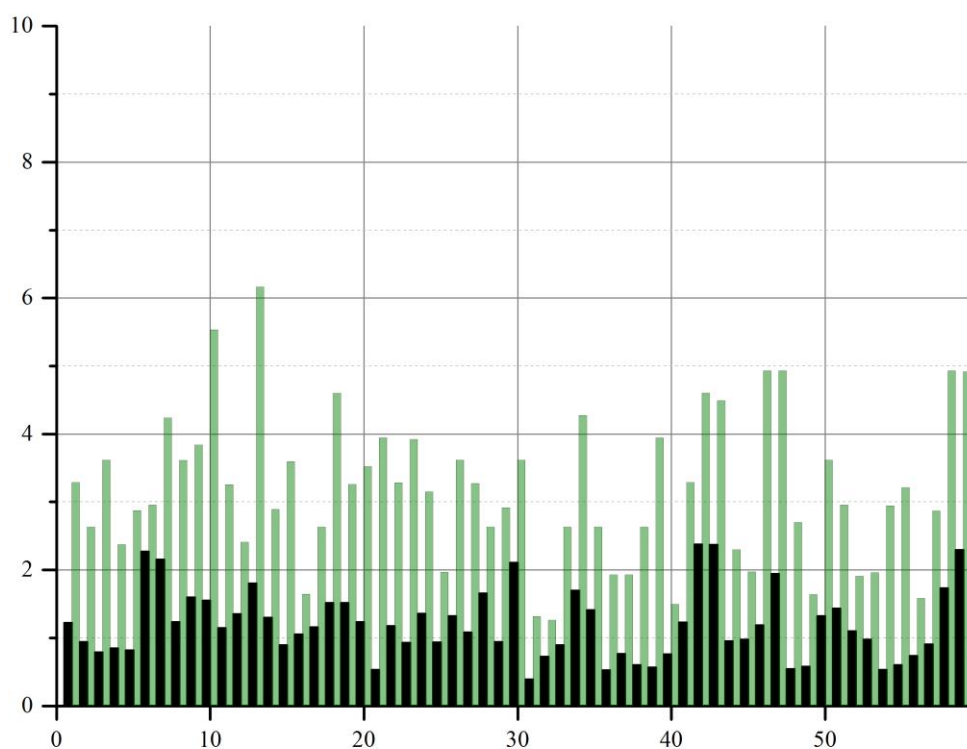


Рис. 6.9 Диаграмма величины средних (чёрный) и максимальных (зелёный) импульсов поддержания квазипериодической орбиты КА «Спектр-РГ» в условиях отсутствия акселерометров. По оси абсцисс – порядковый номер импульса, по оси ординат величина импульса (м/с)

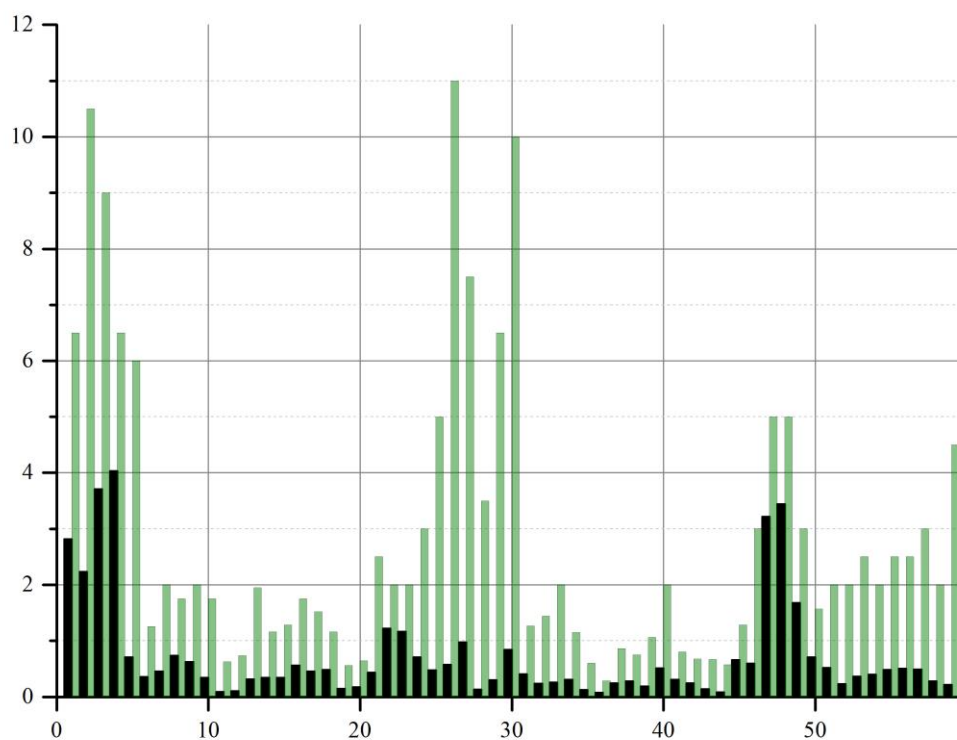


Рис. 6.10 Диаграмма величины средних (чёрный) и максимальных (зелёный) импульсов поддержания квазипериодической орбиты КА «Спектр-М» в условиях отсутствия акселерометров. По оси абсцисс – порядковый номер импульса, по оси ординат величина импульса (м/с)

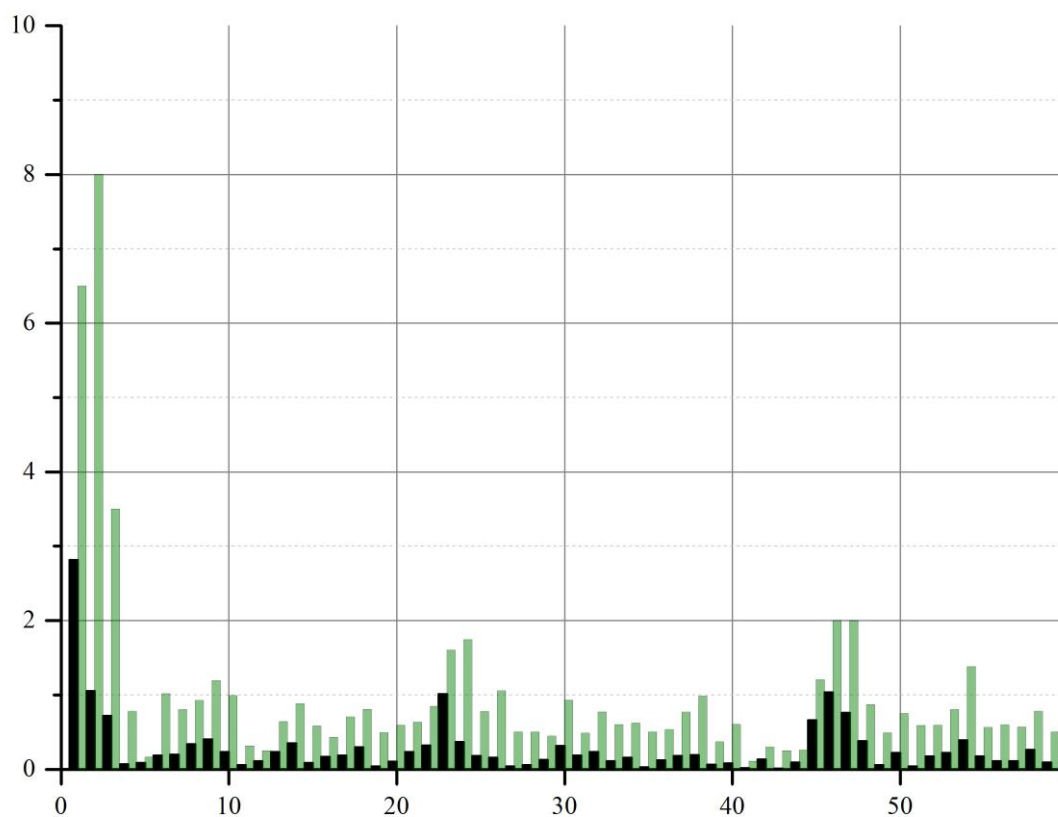


Рис. 6.11 Диаграмма величины средних (чёрный) и максимальных (зелёный) импульсов поддержания квазипериодической орбиты КА «Спектр-М» при наличии акселерометров. По оси абсцисс – порядковый номер импульса, по оси ординат величина импульса (м/с)

Результаты расчёта корректирующих импульсов на траектории перелёта и на этапе движения по квазипериодической орбите с помощью статистического моделирования ошибок исполнения манёвров и ошибок выведения позволяют сделать вывод о существенном снижении затрат характеристической скорости на маневрирование в случае контроля величины выдаваемого импульса с помощью акселерометров. Кроме того, выполнение коррекций на траектории перелёта позволяет существенно снизить значение первого импульса коррекции, переводящего КА с траектории перелёта на семейство квазипериодических орбит заданных амплитуд в окрестности коллинеарной точки либрации. Результаты моделирования показали, что, при условии справедливости допущений о размерах ошибок исполнения манёвров двигательной установкой КА, выбранная стратегия маневрирования позволяет реализовать обе миссии с суммарными затратами характеристической скорости, не превосходящими 300 м/с в худшем случае, а в среднем – 120 м/с.

Заключение

Разработаны методы и алгоритмы решения следующих задач:

- поиск начального приближения для траектории перелёта на выбранный класс квазипериодических орбит на инвариантном многообразии коллинеарной либрационной точки L_2 . Этот метод опирается на вариант метода продолжения по параметру, предложенный М.Л. Лидовым, и метод Линдштедта-Пуанкаре построения периодических орбит;
- построение траекторий перелёта, включающих гравитационный манёвр у Луны, позволяющий совершить одноимпульсный переход на квазипериодические орбиты малой амплитуды. Метод продолжения по параметру удалось распространить на класс траекторий перелёта с гравитационным манёвром.
- расчёт траекторий перелёта на квазипериодические орбиты в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце-Земля с заданными геометрическими характеристиками, с учётом возмущений от нецентральности поля Земли, гравитационного воздействия Солнца, Луны и планет Солнечной системы, а также давления солнечной радиации;
- расчёт манёвров, реализующих эффективный сценарий удержания космического аппарата на выбранной квазипериодической орбите;

Предложенные методы и алгоритмы реализованы в виде программного комплекса, используемого в баллистико-навигационном обеспечении проектов «Спектр-РГ» и «Миллиметрон», предполагающих размещение космического аппарата на квазипериодических орбитах в окрестности точки L_2 системы Солнце-Земля. Расчёт траекторий космического аппарата выполняется в рамках эфемеридной модели Солнечной системы, учитывающей нецентральность поля Земли, гравитационное воздействие Солнца, Луны и планет Солнечной системы, а также давление солнечной радиации.

С помощью программного комплекса:

- рассчитаны множества квазипериодических орбит, имеющих заданные амплитуды в плоскости эклиптики и в ортогональном направлении, отвечающие требованиям проектов «Спектр-РГ» и «Миллиметрон»;
- построены карты множеств полученных решений, позволившие установить структуру временного и энергетического распределения траекторий перехода на квазипериодические орбиты различных типов и определить оптимальные окна старта для миссий «Спектр-РГ» и «Миллиметрон»
- проведено статистическое моделирование траекторий КА «Спектр-РГ» и «Миллиметрон» в рамках эфемеридной модели Солнечной системы с учётом возможных ошибок выведения КА на траекторию перелёта и ошибок исполнения манёвров коррекций поддержания квазипериодических орбит. Результаты моделирования позволяют оценить рост энергетических затрат при реализации полёта, и как следствие, устойчивость предложенных траекторий.

Выполненная работа закладывает методическую и алгоритмическую основы баллистического проектирования траекторий для проектов «Спектр-РГ» и «Миллиметрон», позволяя построить квазипериодические орбиты в окрестности либрационной точки L_2 , удовлетворяющие требованиям научных экспериментов.

Список рисунков

1.1	Семейства периодических и квазипериодических орбит в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце–Земля.....	20
1.2	Векторы, задающие направления экспоненциального ухода от периодического решения.....	21
1.3	Траектория перелёта космического аппарата “ISEE-3” на гало-орбиту в окрестности точки либрации L_1 системы Солнце–Земля.....	25
1.4	Траектория движения КА “WIND” с 16.11.1994 по 15.11.1996 с облетом точки либрации L_1 системы Солнце–Земля.....	27
1.5	Траектория движения КА “WIND” с 11.2002 по 08.2004.....	27
1.6	Траектория движения КА “WIND” с 12.15.2003 по 9.16.2006.....	28
1.7	Траектория движения КА “ACE”, проекция квазипериодической орбиты на плоскости XY , XZ , YZ вращающейся СК.....	29
1.8	Траектория КА “Genesis”.....	30
1.9	Траектория КА “Herschel” и “Planck”.....	31
1.10	Предполагаемая траектория КА “Gaia” – орбита Лиссажу малой амплитуды в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце–Земля.....	32
1.11	Предполагаемая траектория КА “Gaia” – проекции орбиты Лиссажу малой амплитуды в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце–Земля на плоскости вращающейся СК с центром в точке L_2	32
2.1	Системы координат $Ox_1x_2x_3$ и $O'\xi_1\xi_2\xi_3$	35
2.2	Продолжение изолинии от текущей точки к следующей.....	41
2.3	Изолинии, построенные для $\theta_A = 0.171$ и $\theta_B = 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.10$; $h = 200$ км.....	43
2.4	Изолинии, построенные для $\theta_A = 0.175$ и $\theta_B = 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.10$ $h = 200$ км.....	44
2.5	Изолинии, построенные для $\theta_A = 0.18$, $\theta_B = 0.07, 0.08, 0.09, 0.10$; $h = 200$	44
2.6	Изолинии, построенные для $\theta_A = 0.18, 0.19, 0.20$, $\theta_B = 0.10$; $h = 200$	45
2.7	Изолинии, построенные для $\theta_A = 0.18, \theta_B = 0.1524$, $\theta_A = 0.19, \theta_B = 0.1538$, $\theta_A = 0.20, \theta_B = 0.1552$, (красный цвет) и $\theta_A = 0.20, \theta_B = 0.85$ (синий цвет) $h = 300$ км.....	46
2.8	Слева: квазипериодическая орбита, прямой переход с орбиты выведения. Справа: квазипериодическая орбита, переход на которую осуществлён с использованием гравитационного манёвра у Луны. Проекция траекторий на плоскость XU вращающейся СК с центром в точке L_2	48
2.9	Годовая эволюция угла между направлениями от Земли на Солнце и на Луну.....	49
2.10	Изолинии для траекторий перелёта на 27 января 2014 г, $\theta_A = 0.14, \theta_B = 0.1$	51
2.11	Изолинии для траекторий перелёта на 27 февраля 2014 г, $\theta_A = 0.14, \theta_B = 0.1$	51
2.12	Изолинии для траекторий перелёта на 29 марта 2014 г, $\theta_A = 0.14, \theta_B = 0.1$	51

2.13	Изолинии для траекторий перелёта на 30 марта 2014 г, $\theta_A = 0.12, \theta_B = 0.1$	51
2.14	Изолинии для траекторий перелёта на 31 марта 2014 г, $\theta_A = 0.12, \theta_B = 0.1$	51
2.15	Изолинии для траекторий перелёта на 27 апреля 2014 г, $\theta_A = 0.12, \theta_B = 0.1$	51
2.16	Изолинии для траекторий перелёта на 29 мая 2014 г, $\theta_A = 0.12, \theta_B = 0.1$	52
2.17	Изолинии для траекторий перелёта на 25 июня 2014 г, $\theta_A = 0.12, \theta_B = 0.1$	52
2.18	Изолинии для траекторий перелёта на 25 июля 2014 г, $\theta_A = 0.15, \theta_B = 0.1$	52
2.19	Изолинии для траекторий перелёта на 24 августа 2014 г, $\theta_A = 0.14, \theta_B = 0.1$	52
2.20	Изолинии для траекторий перелёта на 22 сентября 2014 г, $\theta_A = 0.12, \theta_B = 0.1$	52
2.21	Изолинии для траекторий перелёта на 23 октября 2014 г, $\theta_A = 0.12, \theta_B = 0.1$	52
2.22	Изолинии для траекторий перелёта на 21 ноября 2014 г, $\theta_A = 0.12, \theta_B = 0.1$	53
2.23	Изолинии для траекторий перелёта на 18 декабря 2014 г, $\theta_A = 0.12, \theta_B = 0.1$	53
2.24	Изолинии для траекторий перелёта с дополнительным витком вокруг Земли на 21 ноября 2014 г, $\theta_A = 0.12, \theta_B = 0.1$	57
2.25	Изолинии для траекторий перелёта с дополнительным витком вокруг Земли на 22 ноября 2014 г, $\theta_A = 0.12, \theta_B = 0.1$	57
2.26	Изолинии для траекторий перелёта с дополнительным витком вокруг Земли на 18 декабря 2014 г, $\theta_A = 0.12, \theta_B = 0.1$	57
2.27	Изолинии для траекторий перелёта с дополнительным витком вокруг Земли на 19 декабря 2014 г, $\theta_A = 0.12, \theta_B = 0.1$	57
4.1	Пространственная визуализация рассчитанных траекторий КА «Спектр-РГ» (красный цвет) и «Спектр-М» (синий цвет) в СК с центром в точке L_2 , размерность – тыс. км.....	97
4.2	Проекция траекторий КА «Спектр-РГ» (красный цвет) и «Спектр-М» (синий цвет) на плоскость XU вращающейся СК с центром в точке L_2 , размерность – тыс. км.....	98
4.3	Проекция траекторий КА «Спектр-РГ» (красный цвет) и «Спектр-М» (синий цвет) на плоскость XZ вращающейся СК с центром в точке L_2 , размерность – тыс. км.....	98
4.4	Проекция траекторий КА «Спектр-РГ» (красный цвет) и «Спектр-М» (синий цвет) на плоскость YZ вращающейся СК с центром в точке L_2 , размерность – тыс. км.....	99
4.5	График эволюции безразмерных параметров $\theta_A, \theta_B, \theta_C$, характеризующих геометрию и устойчивость орбиты КА «Спектр-РГ».....	99
4.6	График эволюции безразмерных параметров $\theta_A, \theta_B, \theta_C$, характеризующих геометрию и устойчивость орбиты КА «Спектр-М».....	100
4.7	Пространственная визуализация рассчитанных траекторий КА «Спектр-РГ» (красный цвет) и «Спектр-М» (синий цвет) в СК с центром в точке L_2 , размерность – тыс. км.....	101

4.8	Проекция траекторий КА «Спектр-РГ» (красный цвет) и «Спектр-М» (синий цвет) на плоскость XU вращающейся СК с центром в точке L_2 , размерность – тыс. км.....	102
4.9	Проекция траекторий КА «Спектр-РГ» (красный цвет) и «Спектр-М» (синий цвет) на плоскость XZ вращающейся СК с центром в точке L_2 , размерность – тыс. км.....	102
4.10	Проекция траекторий КА «Спектр-РГ» (красный цвет) и «Спектр-М» (синий цвет) на плоскость YZ вращающейся СК с центром в точке L_2 , размерность – тыс. км.....	103
4.11	График эволюции безразмерных параметров $\theta_A, \theta_B, \theta_C$, характеризующих геометрию и устойчивость орбиты КА «Спектр-РГ».....	103
4.12	График эволюции безразмерных параметров $\theta_A, \theta_B, \theta_C$, характеризующих геометрию и устойчивость орбиты КА «Спектр-М».....	104
4.13	Траектория КА «Спектр-РГ» и векторы коррекций во вращающейся СК с центром в точке L_2 , размерность – тыс. км.....	105
4.14	Траектория КА «Спектр-РГ», плоскость XU вращающейся СК с центром в точке L_2	106
4.15	Траектория КА «Спектр-РГ», плоскость XZ вращающейся СК с центром в точке L_2	107
4.16	Траектория КА «Спектр-РГ», плоскость YZ вращающейся СК с центром в точке L_2	107
4.17	Траектория КА «Спектр-М» и векторы коррекций во вращающейся СК с центром в точке L_2 , размерность – тыс. км.	108
4.18	Траектория и векторы импульсов коррекций поддержания квазипериодической орбиты КА «Спектр-М», плоскость XU вращающейся СК с центром в точке L_2	109
4.19	Траектория и векторы импульсов коррекций поддержания квазипериодической орбиты КА «Спектр-М», плоскость XZ вращающейся СК с центром в точке L_2	110
4.20	Траектория и векторы импульсов коррекций поддержания квазипериодической орбиты КА «Спектр-М», плоскость YZ вращающейся СК с центром в точке L_2	110
4.21	Гистограмма распределения значений импульса первой коррекции поддержания квазипериодической орбиты КА «Спектр-РГ».....	111
4.22	Гистограмма распределения значений суммарных затрат характеристической скорости на коррекции поддержания орбиты КА «Спектр-РГ».....	112
4.23	Гистограмма распределения значений импульса первой коррекции поддержания квазипериодической орбиты КА «Спектр-М»	113
4.24	Гистограмма распределения значений суммарных затрат характеристической скорости на коррекции поддержания орбиты КА «Спектр-М».....	113
4.25	Эволюция безразмерных параметров $\theta_A, \theta_B, \theta_C$, характеризующих геометрию квазипериодической орбиты в случае пассивного движения по ней. Участок пассивного движения приведён после первой коррекции поддержания квазипериодической орбиты КА «Спектр-РГ».....	115

4.26	Эволюция безразмерных параметров $\theta_A, \theta_B, \theta_C$, характеризующих геометрию квазипериодической орбиты в случае пассивного движения по ней. Участок пассивного движения приведён после первой коррекции поддержания квазипериодической орбиты КА «Спектр-М».....	115
5.1	Карта решений для выбранных параметров квазипериодической орбиты КА «Спектр-РГ» на период с 15.03.2016 по 15.03.2017.....	120
5.2	Временное распределение значений импульсов первой коррекции для выбранных параметров квазипериодической орбиты КА «Спектр-РГ» на период с 15.03.2016 по 15.03.2017.....	121
5.3	Временное распределение значений эклиптического наклона траектории перелёта для выбранных параметров квазипериодической орбиты КА «Спектр-РГ» на период с 15.03.2016 по 15.03.2017.....	122
5.4	Карта решений для выбранных параметров квазипериодической орбиты КА «Спектр-М» на 2019 г.	125
5.5	Временное распределение значений импульсов первой коррекции для выбранных параметров квазипериодической орбиты КА «Спектр-М» на 2019 г.	126
5.6	Временное распределение значений эклиптического наклона траектории перелёта для выбранных параметров квазипериодической орбиты КА «Спектр-М» на 2019 г.	127
5.7	Карта решений для выбранных параметров квазипериодической орбиты КА «Спектр-М» на 2019-2025 г.	128
6.1	Гистограмма распределения значений импульса первой коррекции на траектории перелёта для КА «Спектр-РГ». Значения импульса на оси абсцисс приведены в м/с	132
6.2	Гистограмма распределения продолжительности пребывания КА «Спектр-РГ» в заданной окрестности точки L_2 (приведена в сутках) после первой коррекции на траектории перелёта	132
6.3	Гистограмма распределения значений импульса второй коррекции на траектории перелёта для КА «Спектр-РГ». Значения импульса на оси абсцисс приведены в м/с	133
6.4	Гистограмма распределения продолжительности пребывания КА «Спектр-РГ» в заданной окрестности точки L_2 (приведена в сутках) после второй коррекции на траектории перелёта.....	133
6.5	Гистограмма распределения значений импульса первой коррекции на траектории перелёта для КА «Спектр-М». Значения импульса на оси абсцисс приведены в м/с.....	134
6.6	Гистограмма распределения продолжительности пребывания КА «Спектр-М» в заданной окрестности точки L_2 (приведена в сутках) после первой коррекции на траектории перелёта.....	134
6.7	Гистограмма распределения значений импульса второй коррекции на траектории перелёта для КА «Спектр-М». Значения импульса на оси абсцисс приведены в м/с.....	135
6.8	Гистограмма распределения продолжительности пребывания КА «Спектр-М» в заданной окрестности точки L_2 (приведена в сутках) после второй коррекции на траектории перелёта.....	135

6.9	Диаграмма величины средних (чёрный) и максимальных (зелёный) импульсов поддержания квазипериодической орбиты КА «Спектр-РГ» в условиях отсутствия акселерометров. По оси абсцисс – порядковый номер импульса, по оси ординат величина импульса (м/с).....	138
6.10	Диаграмма величины средних (чёрный) и максимальных (зелёный) импульсов поддержания квазипериодической орбиты КА «Спектр-М» в условиях отсутствия акселерометров. По оси абсцисс – порядковый номер импульса, по оси ординат величина импульса (м/с).....	139
6.11	Диаграмма величины средних (чёрный) и максимальных (зелёный) импульсов поддержания квазипериодической орбиты КА «Спектр-М» при наличии акселерометров. По оси абсцисс – порядковый номер импульса, по оси ординат величина импульса (м/с).....	139

Список таблиц

2.1	Точки построенных изолиний (представлены частично, полученная изолиния содержит 26649 точек для выбранных значений шагов по φ_1 и j_2)	42
2.2	Начальные условия и характеристики траекторий перелёта (в сентябре – декабре 2014 г) с орбиты ИСЗ на квазипериодические орбиты с параметрами $\theta_A = 0.12$, $\theta_B = 0.10$. После старта с околокруговой орбиты ИСЗ КА переходит на траекторию полёта к Луне, дополнительные витки не делаются.....	54
2.3	Начальные условия и характеристики траекторий перелёта (в сентябре – декабре 2014 г) с орбиты ИСЗ на квазипериодические орбиты с параметрами $\theta_A = 0.12$, $\theta_B = 0.10$. До перехода на траекторию перелёта к Луне выполняется дополнительный виток вокруг Земли.....	58
2.4	Даты перелёта в окрестность L_2 для 2014 г. с использованием гравитационного манёвра у Луны.....	60
2.5	Пример точек изолиний, соответствующих условию сохранения наклонения орбиты выведения для траектории перелёта (всего данному условию по наклонению удовлетворяют 148 точек).....	63
2.6	Точки изолиний, соответствующие условию сохранения наклонения орбиты выведения для траектории перелёта с минимальным расстоянием равным 0.001 радиана (приведены все точки).....	65
2.7	Варианты начального приближения для траектории перелёта на 06.07.2019 (файл приведен полностью).....	73
6.1	Ошибки выведения КА на траекторию перелёта	129
6.2	Корректирующие импульсы на этапе перелёта в условиях отсутствия акселерометров	136
6.3	Корректирующие импульсы на этапе перелёта при наличии акселерометров	136
6.4	Суммарные значения затрат характеристической скорости на поддержание квазипериодической орбиты заданной геометрии	138

Список использованных источников

- Галазин, 1998* Галазин В.Ф., Каплан Б.Л., Лебедев М.Г., Максимов В.Г., Петров Н.В., Сидорова-Бирюкова Т.Л. Система геодезических параметров Земли "Параметры Земли 1990 года" (ПЗ-90) / Под ред. В.В. Хвостова. – М.: Координационный научно-информационный центр, 1998. – 37 с.
- Дубошин, 1964* Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. – М.: Наука, 1964. – 560 с.
- Ильин, 2012a* Ильин И.С., Сазонов В.В., Тучин А.Г. Построение ограниченных орбит в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце – Земля // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2012. № 65. С. 1-28.
- Ильин, 2012b* Ильин И.С., Сазонов В.В., Тучин А.Г. Траектории перелёта с низкой околоземной орбиты на многообразие ограниченных орбит в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце – Земля // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2012. № 66. С. 1-25.
- Ильин, 2013a* Боровин Г.К., Ильин И.С., Заславский Г.С., Лавренов С.М., Сазонов В.В., Степаньянц В.А., Тучин А.Г., Тучин Д.А., Ярошевский В.С. Математическое моделирование движения космического аппарата в окрестности точки L_2 системы Солнце – Земля // Инженерный журнал: наука и инновации. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2013, №9 (21), С.1-31. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/1113.html> (дата обращения 16.02.2015)
- Ильин, 2013b* Ильин И.С., Заславский Г.С., Лавренов С.М., Сазонов В.В., Степаньянц В.А., Тучин А.Г., Тучин Д.А., Ярошевский В.С. Баллистическое проектирование траекторий перелёта с орбиты искусственного спутника Земли на гало-орбиту в окрестности точки L_2 системы Солнце – Земля // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 6. С. 1-32.
- Ильин, 2013c* Ильин И.С. Выбор номинальной орбиты КА "Миллиметр" из семейства периодических орбит в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце – Земля // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 46. С. 1-21.
- Ильин, 2014a* Ильин И.С., Сазонов В.В., Тучин А.Г. Гало-орбиты в окрестности точки либрации системы Солнце – Земля // Космические исследования, 2014, №3. С.201-217.

- Ильин, 2014b* Ильин И.С., Заславский Г.С., Лавренов С.М., Сазонов В.В., Степаньянц В.А., Тучин А.Г., Тучин Д.А., Ярошевский В.С. Баллистическое проектирование траекторий перелёта с орбиты искусственного спутника Земли на гало-орбиту в окрестности точки L_2 системы Солнце – Земля // Космические исследования, 2014, №6, С.1-13
- Ильин, 2014c* Заславский Г.С., Захваткин М.В., Ильин И.С., Корянов В.В., Самотохин А.С., Сазонов В.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А., Ярошевский В.С. Баллистико-навигационное обеспечение полета космического аппарата "Спектр-Р" // Космонавтика и ракетостроение, 2014, Т. 74, №1, С. 15-29.
- Лидов, 1976* Вашковьяк М.А., Лидов М.Л., Маркеев А.П. Полуаналитический метод расчёта движения КА в окрестности коллинеарной точки либрации. // Космические исследования, 1976. Т. 14. №6. С.909–921.
- Лидов, 1983* Лидов М.Л., Ляхова В.А. Семейства пространственных периодических орбит задачи Хилла и их устойчивость. // Космические исследования, 1983. Т. 21 №1. С.3-11.
- Лидов, 1987* Лидов М.Л., Ляхова В.А., Тесленко Н.М. Одноимпульсный перелёт на условно-периодическую орбиту в окрестности точки L_2 системы Земля-Солнце // Космические исследования, 1987, Т. 25, №2, С.163-185.
- Лидов, 1994* Вашковьяк М.А., Лидов М.Л., Ляхова В.А., Аналитический метод расчёта движения по гало-орбите и проблема экранирования КА от солнечной радиации в проекте «Реликт-2» // Космические исследования, 1994, Т. 32, №1, С. 3.
- Маркеев, 1978* Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. – М, Наука, 1978. – 312 с.
- Маршал, 2005* Маршал К. Задача трех тел. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 640 с.
- Пуанкаре, 1971* Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избр. тр., т. 1, 2. М.: Наука, 1971, 1972.
- Себехей, 1982* Себехей В. Теория орбит. Ограниченная задача трех тел. – М.: Наука, 1982. – 656 с.
- Соболь, 2006* И.М. Соболь, Р.Б. Статников. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М., «Дрофа», 2006. – 175 с.

- Степаньянц, 2000* Степаньянц В.А., Львов Д.В. Эффективный алгоритм решения системы дифференциальных уравнений движения // Математическое моделирование, т. 12, вып. 6, 2000, С. 9-14.
- ACE* ACE Trajectory in GSE Coordinates. URL: http://www.srl.caltech.edu/ACE/ASC/DATA/browse-html/gse_color.html (дата обращения 25.02.2015)
- Andreu, 2002* Andreu M.A. Dynamics in the Center Manifold Around L2 in the Quasi-Bicircular Problem // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 84(2), 2002, pp. 105–133
- Bauske, 2009* Bauske R. Operational maneuver optimization for the ESA missions Herschel and Planck // Terma GmbH / ESOC OPS-GFI, Robert-Bosch-Str. 5, 64293 Darmstadt, Germany, ISSFD thesis, 2009. URL: http://issfd.org/ISSFD_2009/InterMissionDesignI/Bauske.pdf (дата обращения 20.02.2015)
- Breakwell, 1979* J.V. Breakwell, J. Brown. The Halo Family of Three Dimensional Periodic Orbits in the Earth–Moon Restricted Three Body Problem // Celestial Mechanics, 20(4), 1979, pp 389–404.
- Canalias, 2007* Canalias E.V. Contributions to Libration Orbit Mission Design using Hyperbolic Invariant Manifolds // PhD thesis, Department de Matematica Aplicada, Universitat Politecnica de Catalunya, 2007.
- Corrêa, 2007* Corrêa A.A., Prado A.F.B.A., Stuchi T.J., Beaugé C. Comparasion of Transfer Orbits in the Restricted Three and Four-Body Problems // Nonlinear Dynamics and Systems Theory, vol. 7, No. 3, 2007, pp. 267-277.
- Euler, 1767* De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium // Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, v. 11, 1767, pp. 144-151, перепечатано: Opera Omnia, Series 2, Volume 25, pp. 281 - 289. Доступно по ссылке URL: <http://eulerarchive.maa.org/>, Index number: E327. Перевод на английский язык с комментариями: URL: <http://www.merlyn.demon.co.uk/euler327.htm>.
- Farquhar, 1968* Farquhar R.W. The Control and Use of Libration-Point Satellites // NASA CR-95948, 1968, 214 p. URL: <http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19710000821.pdf> (дата обращения 12.01.2015)
- Farquhar, 1973* R.W. Farquhar, A.A. Kamel. Quasi-Periodic Orbits About the Translunar Libration Point // Celestial Mechanics, 7(4), 1973, pp. 458–473.

- Farquhar, 1980* Farquhar R.W., Muhonen D.P., Newman C.R., Heuberger H.S. Trajectories and Orbital Maneuvers for the First Libration–Point Satellite // Journal of Guidance and Control, 3(6), 1980, pp. 549–554.
- Folkner, 2009* Folkner W.M., Williams J.G., Boggs D.H. The Planetary and Lunar Ephemeris DE421 / The Interplanetary Network Progress Report, vol. 42-178, JPL, Pasadena, California, August 15, 2009, pp. 1–34.
- Folta, 2003* Folta D., Beckman M. Libration Orbit Mission Design: Applications of Numerical and Dynamical Methods // Libration Point Orbits and Applications, edited by G.Gómez, M.W.Lo, J.J. Masdemont, World Scientific, 2003, pp. 85-114.
- Gaia* Gaia Mission & Orbit Design URL: <http://www.spaceflight101.com/gaia-mission-and-orbit-design.html> (дата обращения 25.02.2015)
- GENESIS* GENESIS. Search for Origins. URL: <http://genesission.jpl.nasa.gov/gm2/mission/halo.htm> (дата обращения 25.02.2015)
- Gómez, 1993* Gómez G., Jorba À., Masdemont J. J., Simó C. Study of the transfer from the Earth to a halo orbit around the equilibrium point L_1 // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 56(4):541–562, 1993.
- Gómez, 2001a* Gómez G., Mondelo J.M. The Phase Space Around the Lagrange Points of the RTBP // Physica D, 157(4), 2001, pp. 283–321
- Gómez, 2001b* Gómez, G; Llibre, J; Martínez, R and Simó, C. Dynamics and Mission Design near Libration Points - Volume 1. Fundamentals: The Case of Collinear Libration Points. World Scientific, Singapore. 2001
- Gómez, 2004* Gómez G., Koon W.S., Lo M.W., Marsden J.E., Masdemont J.J., Ross S.D. Connecting Orbits and Invariant Manifolds in the Spatial Restricted Three-Body Problem // Nonlinearity, 17:1571–1606, 2004.
- Gurfil, 2006* Gurfil P., Meltzer D. Stationkeeping on Unstable Orbits: Generalization to the Elliptic Restricted Three-Body Problem // The Journal of Astronautical Sciences, Vol.54, №1, January-March 2006, pp. 29-51
- Howell, 1984* Howell K.C. Three Dimensional Periodic Halo Orbits // Celestial Mechanics, 32(1), 1984, pp. 53-72.

- Howell, 1988* Howell K.C., Barden B.T., Wilson R.S., Lo M.W. Trajectory Design Using a Dynamical Systems Approach with Application to GENESIS // Advances in the Astronautical Sciences, 97, 1998, pp. 1665-1684.
- IERS Convention, 2003* IERS Convention 2003
URL: http://www.iers.org/SharedDocs/Publikationen/EN/IERS/Publications/tn/TechnNote32/tn32.pdf?__blob=publicationFile&v=1 (дата обращения 20.01.2015)
- Ilin, 2014* Borovin G., Ilin I., Tuchin A. Quasi periodic orbits in the vicinity of the Sun-Earth L_2 point and their implementation in “Spectr-RG” & “Millimetron” missions. // Mathematica Montisnigri, Vol XXX, 2014.
- Jorba, 1999* Jorba À., Masdemont J.J. Dynamics in the Center Manifold of the Restricted Three-Body Problem // Physica D, 132, 1999, pp.189–213.
- Kolemen, 2006* Kolemen E., Kasdin N. J., Gurfil P. Quasi-Periodic Orbits of the Restricted Three-Body Problem Made Easy. // Mechanical and Aerospace Engineering, Princeton, NJ, 2006. URL: http://www.princeton.edu/~hcil/papers/kolemen-kasdin-gurfil-_quasi_periodic_orbits_of_RTBP_made_easy.pdf
- Lagrange, 1772* Lagrange J.L. Essai sur la problème des trois corps. Paris, 1772. URL: http://sites.mathdoc.fr/cgi-bin/oeitem?id=OE_LAGRANGE__6_229_0 (дата обращения 19.01.2015)
- Masdemont, 2003* Cobos J. Masdemont. J.J. Astrodynamical Applications of Invariant Manifolds Associated with Collinear Lissajous Libration Orbits. In Libration Point Orbits and Applications, 2003.
- Masdemont, 2005* Masdemont J.J. High-order expansions of invariant manifolds of libration point orbits with applications to mission design // Dynamical Systems: An International Journal. Vol. 20, Issue 1, 2005, pp.59-113.
- Meyer, 1992* Meyer K.R., Hall G.R. Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem // Applied Mathematical Sciences, vol. 90. Springer-Verlag, New York, 1992. XIII p. +399 p.
- Olikara, 2010* Olkiara Z.P. Computation of Quasi-periodic Tori in the Circular Restricted Three-body Problem, Prudue University, USA, 2010.

- Poincaré, 1890* Poincaré J.H. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique // Acta Mathematica, 13, 1890, 1-270.
- Renk, 2014* Renk F., Landgraf M. Gaia: trajectory design with tightening constraints // 24th International Symposium on Space Flight Dynamics proceedings, Laurel, Maryland, USA, 2014
- Richardson, 1975* Richardson D.L., Cary N.D. A uniformly valid solution for motion about the interior libration point of the perturbed elliptic-restricted problem // Proceedings of the AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference. Nassau, Bahamas, July 1975.
- Richardson, 1980* Richardson D.L. Analytic Construction of Periodic Orbits about the Collinear Points // Celestial Mechanics, v.22, 1980, pp.241-253.
- Simó, 1986* Simó C., Gómez G., Llibre J., Martínez Station Keeping of a Quasiperiodic Halo Orbit Using Invariant Manifolds // Second International Symposium on Spacecraft Flight Dynamics ESA 1986, SP-255. pp.61-70.
- Simó, 1995* Simó C., Gómez G., Jorba À., Masdemont J. The bicircular model near the triangular libration points of the RTBP // From Newton to Chaos. Editors: A. Roy, B. Steves, Plenum Press, 1995. pp. 343–370.
- Simó, 2000* Simó, C. Stuchi T.J. Central Stable/Unstable Manifolds and the Destruction of KAM Tori in the Planar Hill Problem // Physica D, 140(1–2), 2000, pp.1-32.
- Wiggins, 2003* Wiggins S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. – Springer-Verlag, New York, 2003. – xx p.+843 p.
- WIND* WIND. Understanding Interplanetary Dynamics. URL: <http://pwg.gsfc.nasa.gov/wind.shtml> (дата обращения 25.02.2015)
- Yu, 2014* Yu W.H., Richon K. Launch Window Trade Analysis for the James Webb Space Telescope // 24th International Symposium on Space Flight Dynamics proceedings, Laurel, Maryland, USA, 2014.
- Zanzottera, 2011* Zanzottera A., Mingotti G., Castelli R., Dellnitz M. Low-Energy Earth-to-Halo Transfers in the Earth–Moon Scenario with Sun-Perturbation // Nonlinear and Complex Dynamics // Applications in Physical, Biological, and Financial Systems. Editors: J.A.T. Machado, D. Baleanu, A.C.J. Luo : Springer, 2011, pp. 39-52.