

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

**С.М. Лавренов, Д.А. Михайлин, А.Г. Тучин,
Д.А. Тучин, В.В. Фитенко, В.С. Ярошевский**

**Математическая модель ДИСД
в проектах мягкой посадки на Луну**

Москва — 2013

Лавренов С.М., Михайлин Д.А., Тучин А.Г., Тучин Д.А., Фитенко В.В., Ярошевский В.С.

Математическая модель ДИСД в проектах мягкой посадки на Луну

Доплеровский измеритель скорости и дальности (ДИСД) обеспечивает обнаружение и радиолокационный захват сигнала, отраженного от подстилающей поверхности. ДИСД используется в проектах мягкой посадки на поверхность Луны. Рассмотрены математические модели измерений дальности и скорости, определения углов нормали к подстилающей поверхности. Описывается функционирование ДИСД. Приведен алгоритм восстановления дальности по измерениям.

Ключевые слова: ДИСД, измерение дальности, измерение скорости, посадка на Луну.

Lavrenov S.M., Michaylin D.A., Tuchin A.G., Tuchin D.A., Fitenko V.V., Yaroshevskiy V.S.

DISD mathematical model for the soft Lunar landing projects

Doppler measurer of velocity and range (DISD) provides detection and radiolocation capture of the signal reflected from the underlying surface. DISD is used in the soft Lunar landing projects. Mathematical models of range and velocity measurement and of normal angles determination are considered in the paper. The functioning of the DISD device is described. The algorithm converting measurements into range values is presented.

Key words: DISD, range measurement, velocity measurement, Lunar landing.

Оглавление

Введение	3
1. Описание функционирования ДИСД.....	3
2. Алгоритм восстановления дальности.....	5
3. Алгоритм вычисления скорости	8
4. Алгоритм определения нормали к поверхности	9
5. Моделирование измерений дальности и скорости по лучу	10
6. Результаты численного моделирования раскрытия дальности	10
Выводы	13
Библиографический список.....	15

Введение

Доплеровский измеритель скорости и дальности (ДИСД) обеспечивает обнаружение и радиолокационный захват отраженного от подстилающей поверхности сигнала [1, 2]. В ДИСД реализовано одновременное измерение скоростей и наклонных дальностей по лучам антенной системы [3]. ДИСД используется на заключительном участке посадки на Луну [4] и обеспечивает:

- измерение четырех проекций вектора скорости космического аппарата (КА) относительно поверхности Луны на лучи антенн;
- измерение четырех наклонных дальностей до поверхности Луны по лучам антенн;
- определение двух углов отклонения нормали к поверхности Луны от направления оси ОХ приборной системы координат.

ДИСД состоит из передающего модуля, приемного модуля, синхронизатора, устройства цифровой обработки сигналов и блока питания. Для определения наклонных дальностей по лучам антенны в измерителе используется фазовый метод измерения дальности по разности набега фаз двух симметрично расположенных гармоник излучаемого частотно-модулированного сигнала. Поиск компромисса между требуемой точностью измерения дальности и максимальным периодом однозначности по дальности решен путем применения алгоритмического метода обработки измерений. Для вычисления однозначной дальности в ДИСД применяются несколько частот модуляции.

В [3] описан алгоритм восстановления однозначной дальности. В данном препринте рассмотрен более общий вариант восстановления однозначной дальности.

В препринте рассмотрены вопросы обработки измерений ДИСД для получения дальности, скорости и нормали к поверхности.

В настоящем препринте не рассматриваются радиотехнические модели излучения, отражения и приема сигнала.

1. Описание функционирования ДИСД

При посадке на Луну с использованием тормозного двигателя под космическим аппаратом возникают облака ионизированной плазмы, а при небольших высотах и пыли. Поэтому диапазон частот, используемых в ДИСД, выбран в сантиметровом диапазоне, где ослабление излучения от указанных облаков незначительно. Измерения производятся по трассе КА – поверхность Луны – КА, поэтому измеренная дальность делится пополам и удобнее вместо длины волны использовать длину полуволны. В ДИСД выбрана несущая

частота излучения 13325 МГц (длина полуволны 1.065 см), измерительные частоты модуляции и длины полуволн имеют следующие значения: $f_1 = 61.52$ кГц, $f_2 = 82.03$ кГц, $f_3 = 102.50$ кГц, $f_4 = 187.50$ кГц, $\lambda_1 = 2438$ м, $\lambda_2 = 1829$ м, $\lambda_3 = 1463$ м, $\lambda_4 = 800$ м. Измерения дальности на каждой частоте не превышают величины полуволны, поэтому они называются неоднозначными дальностями. На рис. 1 показаны измерения неоднозначной дальности на четырех частотах.

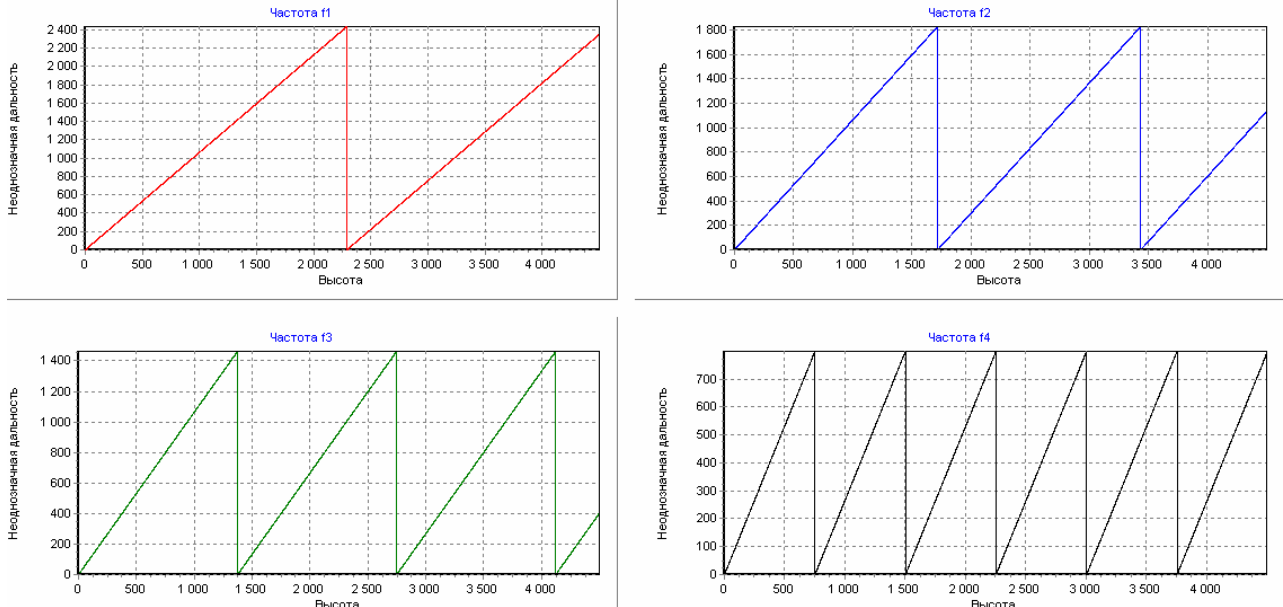


Рис. 1. Измерения неоднозначной дальности на частотах f_1, f_2, f_3, f_4 .

На рис. 2 показано расположение четырех лучей в приборной системе координат.

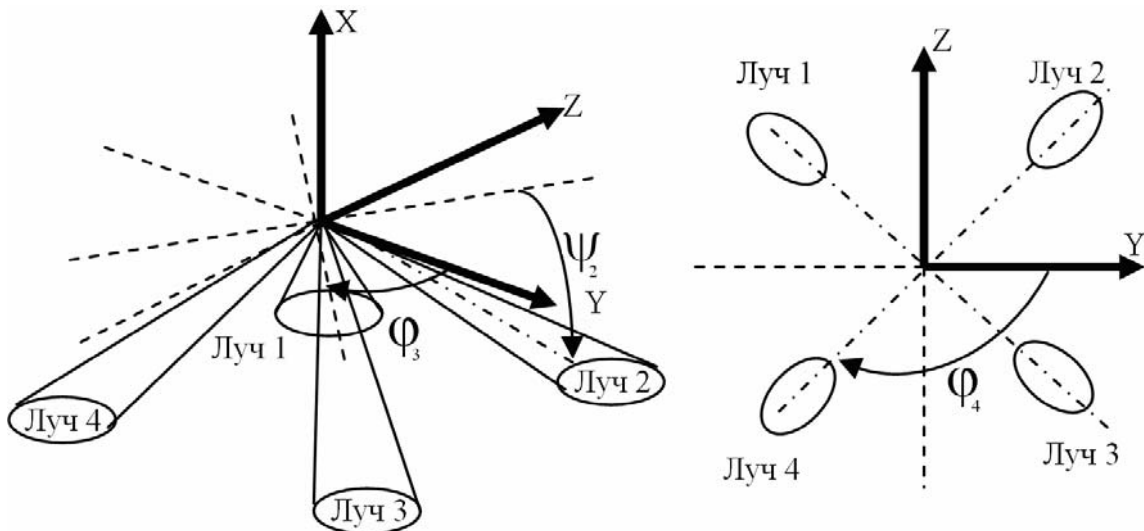


Рис. 2. Расположение измерительных лучей

Вектор \bar{u}_i единичной длины, направленный по оси диаграммы i -го луча, в приборной системе координат описывается соотношением:

$$\bar{u}_i = (-\sin \psi_i \quad \cos \psi_i \cos \varphi_i \quad -\cos \psi_i \sin \varphi_i)^T, \quad (1)$$

где ψ_i – угол отклонения оси i -го луча антенны от плоскости OYZ; φ_i – угловое положение i -го луча в проекции на плоскость OYZ, $\varphi_i = 225^\circ - 90^\circ \cdot i$, $i = 1, \dots, 4$, угол отсчитывается против часовой стрелки от оси OY.

В ДИСД измеряются проекции вектора скорости $V_i = (\bar{V}, \bar{u}_i)$ на орты лучей, а также дальности в направлении \bar{u}_i . В ДИСД определяются углы нормали поверхности относительно оси OX приборной системы координат.

Измерения производятся последовательно на трех частотах f_1, f_2, f_3 . На каждой частоте производятся измерения по каждому из четырех лучей начиная с первого. Длительность измерения по одному лучу составляет 40.992 мс. После измерения по четвертому лучу ДИСД меняет частоту, выбирая последовательно из указанной тройки частот. Измерения выдаются с периодом $4 \times 40.992 = 163.968$ мс. При дальности менее 600 м ДИСД самостоятельно переходит на частоту f_4 , не переходя в дальнейшем на измерения на других частотах.

2. Алгоритм восстановления дальности

Обозначим частоту модуляции по лучу как f , тогда длина излученной полуволны равна $L = \frac{c}{2 \cdot f}$, где c – скорость света. Измеренное значение (неоднозначная дальность) не превышает величины полуволны L . Дальность до поверхности D описывается соотношением

$$D = n \cdot L + B, \quad (2)$$

где n – целое число полуволн, B – неоднозначное измерение дальности (остаток от деления D на L).

Необходимо восстановить дальность до поверхности, если даны неоднозначные дальности на двух разных частотах излучаемых волн.

Запишем уравнение (2) для двух излучаемых частот:

$$\begin{cases} D_1 = n_1 \cdot L_1 + B_1 + \varepsilon_1 \\ D_2 = n_2 \cdot L_2 + B_2 + \varepsilon_2 \end{cases}, \quad (3)$$

где ε_1 и ε_2 – шумовые составляющие. Так как неоднозначные дальности содержат флуктуационную ошибку измерения, то D_1 и D_2 в (3) в общем случае не равны.

Заметим, что задача восстановления однозначной дальности в идеальном случае при отсутствии помех решается, если выполняется соотношение

$$\max(L_1, L_2) \cdot n_{\max} = \min(L_1, L_2) \cdot (n_{\max} + 1), \quad \text{где} \quad n_{\max} = \frac{\min(L_1, L_2)}{\max(L_1, L_2) - \min(L_1, L_2)} -$$

максимально допустимое значение числа полуволн. Например, для частот модуляции f_1 и f_2 $n_{\max} = 3$, что соответствует максимальной дальности 7300 м, при которой возможно восстановление.

Обозначим $\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ и запишем уравнение для определения номеров зоны в следующем виде:

$$n_1 \cdot L_1 + B_1 = n_2 \cdot L_2 + B_2 + \varepsilon. \quad (4)$$

Необходимо решить уравнение (4) относительно n_1 и n_2 в целых числах. Преобразуем (4) к виду

$$n_1 = \frac{n_2 \cdot L_2 + B_2 - B_1 + \varepsilon}{L_1}. \quad (5)$$

Если использовать дополнительное условие, что дальность не превышает значения \tilde{D} , то можно рассмотреть следующий алгоритм восстановления дальности.

Определим максимальное значение n_2 из соотношения $n_{2\max} = \left[\frac{\tilde{D}}{L_2} \right]$, где $[x]$ —функция вычисления целого, не превосходящего числа x . Для всех целых чисел n_2 от нуля до $n_{2\max}$ вычисляем, вообще говоря, не целое значение \bar{n}_1 по формуле (5). Обозначим ближайшее целое к \bar{n}_1 через n_1 и дробную часть через δn_1 , так чтобы

$$\bar{n}_1 = n_1 + \delta n_1. \quad (6)$$

Таким образом, определена функция, которая каждому значению $n_2 = 0, \dots, n_{2\max}$ сопоставляет пару чисел $(n_1, \delta n_1)$.

Обозначим

$$n_2^{\min 1} = \arg \min (|\delta n_1(n_2)|), \quad n_2 = 0, \dots, n_{2\max}$$

$$n_2^{\min 2} = \arg \min (|\delta n_1(n_2)|), \quad n_2 = 0, \dots, (n_2^{\min 1} - 1), (n_2^{\min 1} + 1), \dots, n_{2\max}$$

Соответствующие значения $n_1^{\min 1}, \delta n_1^{\min 1}$ и $n_1^{\min 2}, \delta n_1^{\min 2}$ можно получить по формулам (5) и (6). Если $|\delta n_1^{\min 1} - \delta n_1^{\min 2}| \geq \Delta$, то искомое решение определяется значениями $n_1^{\min 1}, n_2^{\min 1}$. Значение Δ зависит от величины шума ε . В противном случае по формуле (3) вычисляем значения $D_1^{\min 1}, D_1^{\min 2}$ и используем

предыдущее вычисленное значение дальности D_{last} . Искомое решение определяется соотношениями

$$\begin{cases} n_1^{\min 1}, n_2^{\min 1}, \text{если } |D_1^{\min 1} - D_{last}| < |D_1^{\min 2} - D_{last}| \\ n_1^{\min 2}, n_2^{\min 2}, \text{если } |D_1^{\min 1} - D_{last}| \geq |D_1^{\min 2} - D_{last}| \end{cases}$$

На первом шаге алгоритма в качестве D_{last} может быть использовано значение дальности на максимальной высоте..

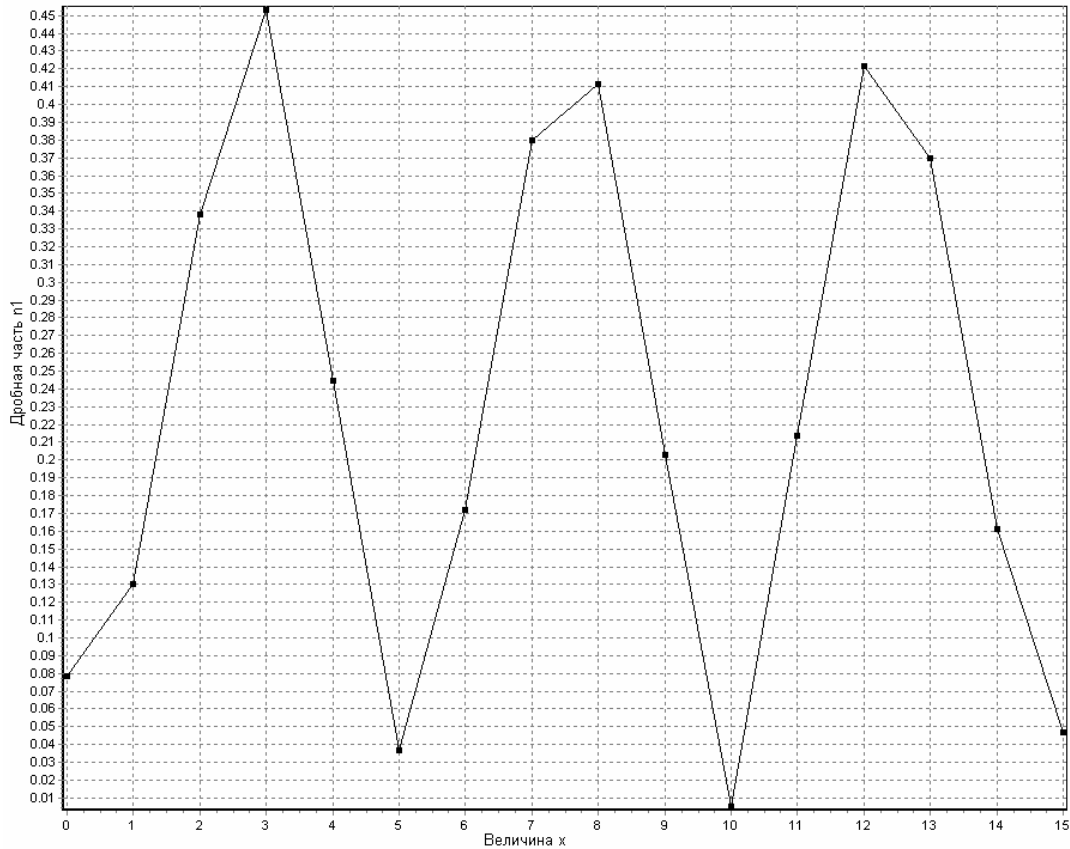


Рис. 3. Дробные части n_1

Этот алгоритм надежно работает, если величина ε достаточно мала. При больших шумах используем другую версию алгоритма. Введем переменную $x = k \cdot n_1 + n_2$, где k – целое число, выбираемое из условия: чем k больше, тем меньше влияние шума, но больше процесс вычисления, т.е. больше объем используемых ресурсов. Соотношения (4) и (5) можно переписать

$$n_1 \cdot L_1 + B_1 = (x - k \cdot n_1) \cdot L_2 + B_2 + \varepsilon \quad (7)$$

и

$$n_1 = \frac{x \cdot L_2 + B_2 - B_1 + \varepsilon}{L_1 + k \cdot L_2} \quad (8)$$

Заметим, что в (8) для $k > 0$ знаменатель больше, чем в (5). Влияние ошибки ε уменьшается. Максимальное значение x определяется соотношением:

$$x_{\max} = k \cdot \left[\frac{\tilde{D}}{L_1} \right] + \left[\frac{\tilde{D}}{L_2} \right].$$

Далее логика алгоритма практически не изменяется.

На рис. 3 приведен график дробных частей n_i , полученных по формуле (8) при разных x на высоте 4000 м с моделированием ошибок неоднозначных дальностей.

При $k = -1$ имеем алгоритм, описанный в [3].

3. Алгоритм вычисления скорости

В ДИСД измеряются проекции вектора скорости \vec{V} КА в приборной системе координат на орты лучей с обратным знаком, т.е. $V_i = -(\vec{V}, \vec{u}_i)$. Таким образом, знаки скоростей являются положительными при приближении к поверхности и отрицательными при удалении. Для определения вектора скорости $\vec{V} = (v_x, v_y, v_z)$ определим функционал

$$\Phi = \sum_{i=1}^4 ((\vec{V}, \vec{u}_i) + V_i)^2$$

который надо минимизировать.

Методом наименьших квадратов получаем систему линейных уравнений для вычисления вектора скорости в приборной системе координат:

$$\begin{pmatrix} -\sum \sin^2 \psi_i & \sum \sin \psi_i \cos \psi_i \cos \varphi_i & -\sum \sin \psi_i \cos \psi_i \sin \varphi_i \\ \sum \sin \psi_i \cos \psi_i \cos \varphi_i & \sum \cos^2 \psi_i \cos^2 \varphi_i & \sum \cos^2 \psi_i \sin \varphi_i \cos \varphi_i \\ -\sum \sin \psi_i \cos \psi_i \sin \varphi_i & \sum \cos^2 \psi_i \sin \varphi_i \cos \varphi_i & \sum \cos^2 \psi_i \sin^2 \varphi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum V_i \sin \psi_i \\ -\sum V_i \cos \psi_i \cos \varphi_i \\ -\sum V_i \cos \psi_i \sin \varphi_i \end{pmatrix} \quad (9)$$

При $\psi = \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi_4$ и $\varphi_i = 225^\circ - 90^\circ \cdot i$, $i = 1, \dots, 4$ соотношение (9) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4 \sin \psi} \\ \frac{V_1 - V_2 - V_3 + V_4}{2\sqrt{2} \cos \psi} \\ \frac{-V_1 - V_2 + V_3 + V_4}{2\sqrt{2} \cos \psi} \end{pmatrix}.$$

Для моделирования измерений V_i использовалось значение $\psi = 70^\circ$.

4. Алгоритм определения нормали к поверхности

В ДИСД реализован следующий алгоритм расчета углов наклона нормали к подстилающей поверхности. Так как плоскость определяется тремя точками, то для 4-х лучевой антенны можно построить четыре плоскости, группируя четыре тройки лучей. Обозначим выбранную тройку лучей через i, j, k .

Нормаль к плоскости поверхности Луны, определяемая по тройке измерений дальности, имеет вид:

$$\bar{n}_{ijk} = (D_j \bar{u}_j - D_i \bar{u}_i) \times (D_k \bar{u}_k - D_i \bar{u}_i), \quad (10)$$

где D_i, D_j, D_k – дальности до поверхности по лучам $\bar{u}_i, \bar{u}_j, \bar{u}_k$ соответственно.

Если имеются измерения по четырем лучам, то можно построить еще один вектора нормали:

$$\bar{n}_{4231} = (D_4 \bar{u}_4 - D_2 \bar{u}_2) \times (D_3 \bar{u}_3 - D_1 \bar{u}_1). \quad (11)$$

Вектор проекции нормали к плоскости поверхности Луны от направления оси ОХ в плоскости ОХУ приборной системы координат определяется соотношением:

$$\bar{n}_{xy} = \bar{n}_{ijk} - (\bar{n}_{ijk}, \bar{e}_z) \bar{e}_z, \quad (12)$$

где $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$ – орты приборной системы координат.

Угол θ_{xy} отклонения вектора \bar{n}_{xy} от оси ОХ определяется соотношением:

$$\theta_{xy} = \begin{cases} \arccos \frac{(\bar{n}_{xy}, \bar{e}_x)}{\|\bar{n}_{xy}\|}, & \text{если } (\bar{n}_{xy}, \bar{e}_x) \geq 0 \\ -\arccos \frac{(\bar{n}_{xy}, \bar{e}_x)}{\|\bar{n}_{xy}\|}, & \text{если } (\bar{n}_{xy}, \bar{e}_x) < 0 \end{cases}. \quad (13)$$

Вектор проекции нормали к плоскости поверхности Луны от направления оси ОХ в плоскости ОХZ приборной системы координат определяется соотношением:

$$\bar{n}_{xz} = \bar{n}_{ijk} - (\bar{n}_{ijk}, \bar{e}_y) \bar{e}_y. \quad (14)$$

Угол θ_{xz} отклонения вектора \bar{n}_{xz} от оси ОХ определяется соотношением:

$$\theta_{xz} = \begin{cases} \arccos \frac{(\bar{n}_{xz}, \bar{e}_x)}{\|\bar{n}_{xz}\|}, & \text{если } (\bar{n}_{xz}, \bar{e}_x) \geq 0 \\ -\arccos \frac{(\bar{n}_{xz}, \bar{e}_x)}{\|\bar{n}_{xz}\|}, & \text{если } (\bar{n}_{xz}, \bar{e}_x) < 0 \end{cases} \quad (15)$$

Для получения осредненных углов $\tilde{\theta}_{xy}$ и $\tilde{\theta}_{xz}$ используется осредненный вектор нормали $\tilde{\bar{n}}_{ijk} = \frac{\bar{n}_{142} + \bar{n}_{143} + \bar{n}_{243} + \bar{n}_{214} + \bar{n}_{4231}}{5}$, при условии порядка расположения лучей по часовой стрелке.

5. Моделирование измерений дальности и скорости по лучу

Моделирование измерений по одному лучу антенны учитывает диаграмму направленности с телесным углом $\omega_i = 7.5^\circ \pm 0.5^\circ$ по каждому из лучей.

Для моделирования измерений по лучу \bar{u}_i проводилось осреднение измерений по пяти направлениям. Пусть $\bar{n}_{1i} = \bar{u}_i \times \bar{e}_x$, $\bar{n}_{2i} = \bar{n}_{1i} \times \bar{u}_i$, тогда пять направлений определяются следующими векторами:

$$\begin{aligned} \bar{q}_{1i} &= \bar{u}_i + \operatorname{tg}(\omega_i) \bar{n}_{1i} \\ \bar{q}_{2i} &= \bar{u}_i - \operatorname{tg}(\omega_i) \bar{n}_{1i} \\ \bar{q}_{3i} &= \bar{u}_i + \operatorname{tg}(\omega_i) \bar{n}_{2i} \\ \bar{q}_{4i} &= \bar{u}_i - \operatorname{tg}(\omega_i) \bar{n}_{2i} \\ \bar{q}_{5i} &= \bar{u}_i \end{aligned} \quad (16)$$

Для моделирования измерений дальности и скорости использовалось значение $\psi = 70^\circ$.

6. Результаты численного моделирования раскрытия дальности

Для моделирования измерителя дальности использовалось соотношение (8) с $k=4$. Ошибка измерения формировалась по формуле $\varepsilon_i = D_i \cdot \xi$, где ξ – случайная величина с нормальным законом распределения, с математическим ожиданием равным 0 и средним квадратичным отклонением равным 0.01.

Каждое измерение проводилось на следующей по порядку частоте. Сначала – на частотах f_1 и f_2 , затем на частотах f_2 и f_3 и на частотах f_3 и f_1 .

Моделировалось снижение космического аппарата с высоты 4.5 км со скоростью 2 м/с и 50 м/с. На рис. 4. представлены полученные значения дальности как функция высоты, с которой производилось измерение.

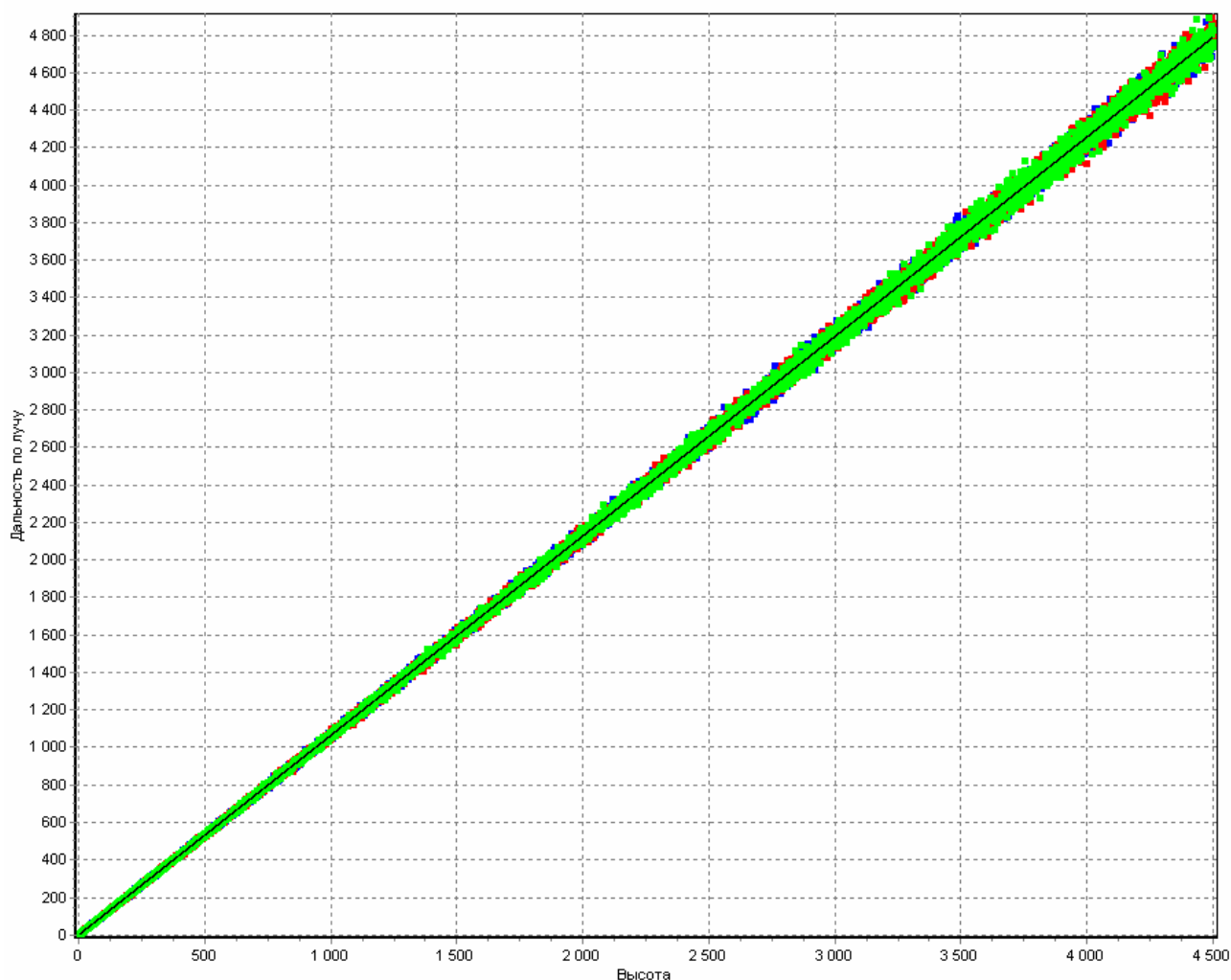


Рис. 4. Восстановление дальности при спуске с 4.5 км (2 м/с)

При снижении КА шумовая составляющая уменьшается. На графике шумы показаны в виде угла, содержащего восстановленные однозначные дальности (зеленый цвет). Ошибок в восстановлении дальности нет. При моделировании использовалось значение $\Delta = 0.05$.

На рис. 5 представлен результат раскрытия на высотах от 4000 до 4500 м.

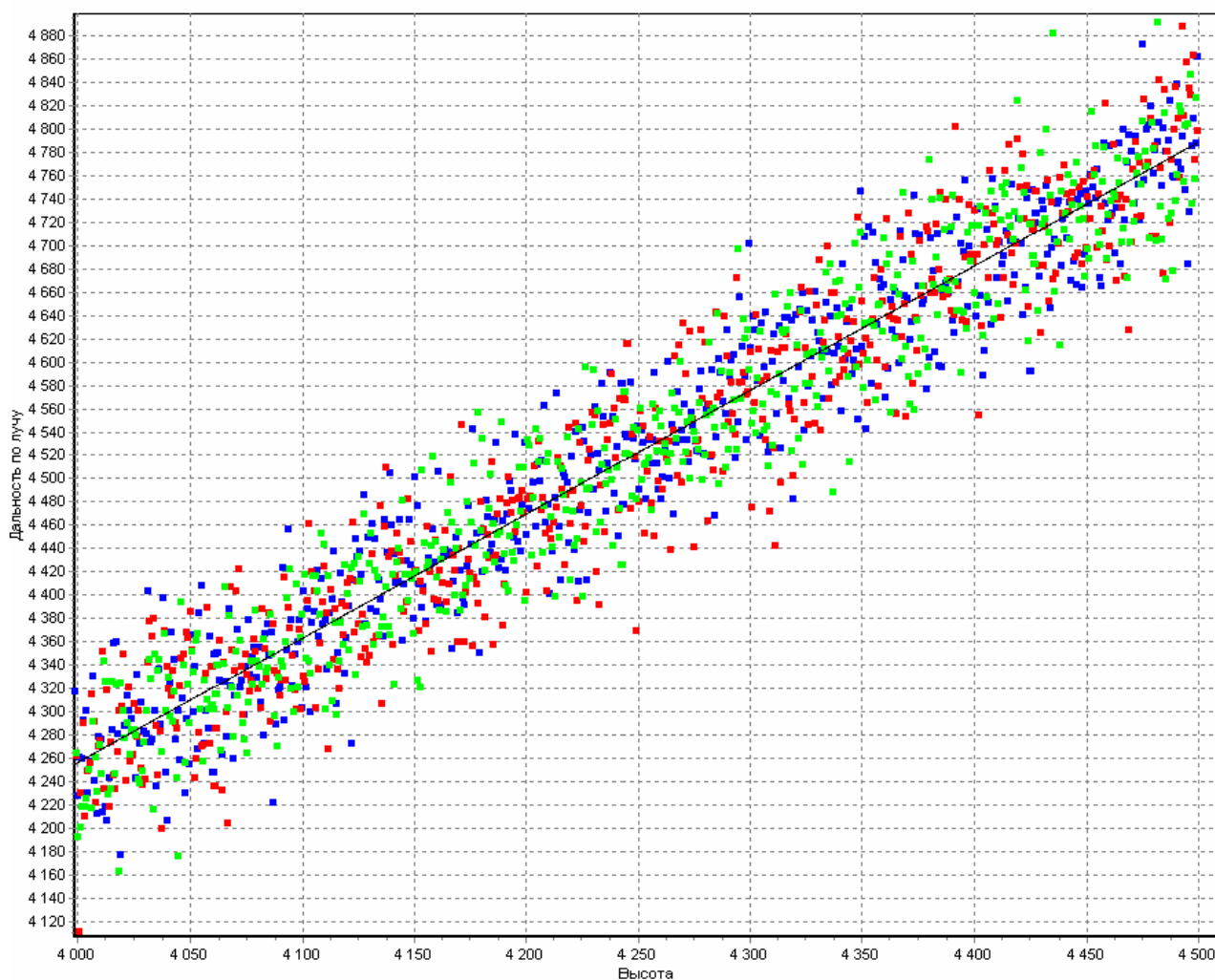


Рис. 5. Моделирование ошибок измерений на высоте 4000 м.
Скорость спуска 2 м/с

Разным цветом показано восстановление дальности на разных частотах. Зеленым цветом – на частотах f_2 и f_3 , синим цветом – на частотах f_3 и f_1 , красным цветом – на частотах f_1 и f_2 . Черным цветом показана траектория снижения космического аппарата. Моделирование показало, что ошибка дальности может достигать 450 м с учетом положительной ошибки для неоднозначной дальности B_2 (+225 м) и отрицательной ошибки для неоднозначной дальности B_1 (-225 м).

На рис. 6 показан результат моделирования на малых высотах. На высоте 100 м ошибка достигает 1.5 м. На малых высотах ошибка дальности уменьшается до нескольких сантиметров.

Моделирование спуска со скоростью 50 м/с с 4500 м до высоты 500 м показано на рис. 7. При моделировании восстановление дальности происходило без ошибок.

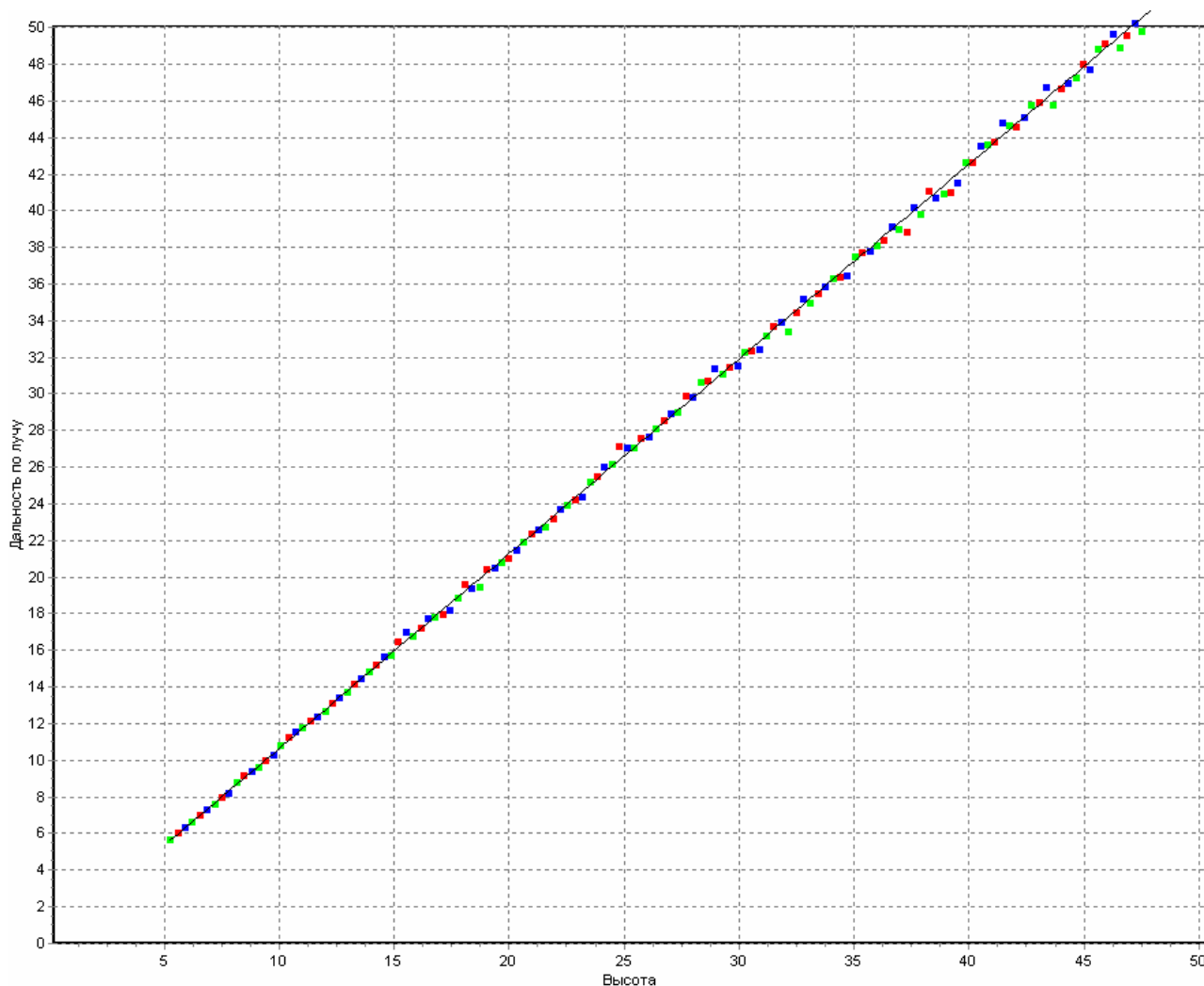


Рис. 6. Результат моделирования на малых высотах. Скорость спуска 2 м/с

При статистических испытаниях алгоритма восстановления дальности по зашумленным данным на 200 000 спусках с 4500 м со скоростью 2 м/с смоделировано 2 809 400 000 измерений. Наблюдалось полное отсутствие ошибок восстановления дальности.

Выводы

1. Описан прибор ДИСД. Приведены соотношения для расчетных измеренных значений дальности и скорости по лучам.
2. Приведен алгоритм восстановления дальности по измерениям на разных частотах модуляции. Статистическое моделирование работы алгоритма показало безошибочность его работы в условиях помех.
3. Приведено соотношение для вычисления вектора скорости в приборной системе координат по измеренным значениям скоростей по лучам.
4. Математическое моделирование работы прибора ДИСД показывает, что при принятых моделях измерителя, прибор способен решать задачи при посадке на Луну.

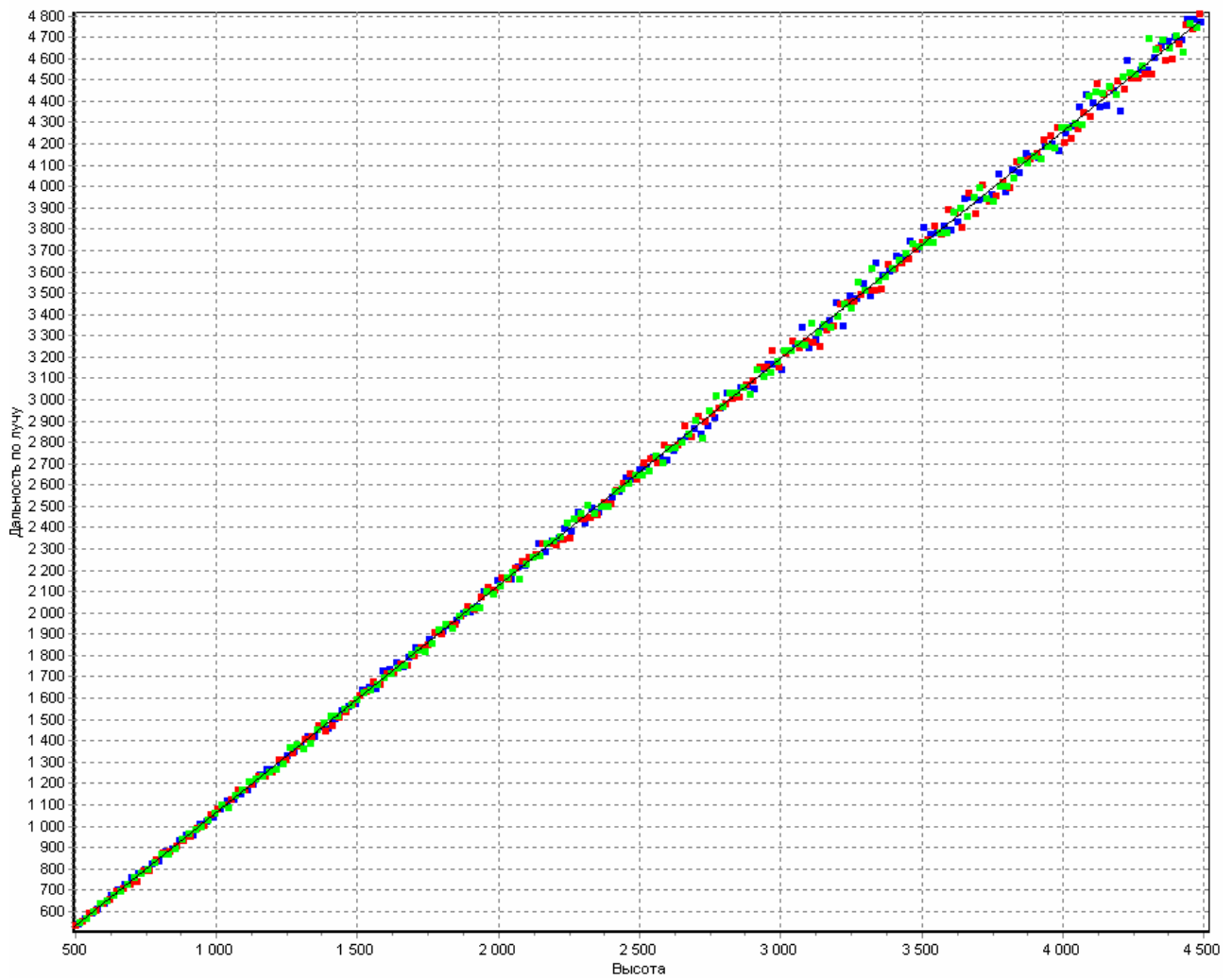


Рис. 7. Восстановление дальности при спуске с 4.5 км. Скорость спуска 50 м/с

Библиографический список

1. Баллистика, навигация и управление движением космического аппарата на этапе его посадки на поверхность Фобоса / Аким Э.Л., Архангельский Р.Н., Зайко Ю.К., Лавренов С.М., Порошин А.Л., Рузский Е.Г., Степаньянц В.А., Тучин А.Г., Тучин Д.А., Федотов В.П., Ярошевский В.С. // Космич. иссл. — 2009. — Т. 47. — № 4. — С. 332-342. URL: <http://elibrary.ru/item.asp?id=12600952>
2. Радиолокационные системы землеобзора космического базирования / Под ред. В.С. Вербы. — М.: Радиотехника. 2010. — 680 с. URL: <http://www.vega.su/upload/iblock/551/5510dafe61b43b1e07a116b1afa4e8a7.pdf>
3. Доплеровские радиолокаторы с одновременным измерением скорости, высоты полета и углов наклона посадочной площадки для летательных аппаратов с вертикальной посадкой / Фитенко В.В., Варгафтик В.Н. // Сборник докладов VI Всероссийской конференции «Радиолокация и радиосвязь», М.: ФГУП «ИРЭ им.В.А.Котельникова РАН», т.1, 2012. URL: <http://jre.cplire.ru/jre/microwaves/docs/conf6books.rar>
4. Доплеровские системы посадки космических модулей на Луну и планеты солнечной системы / Егоров В.В. // Девятая открытая Всероссийская конференция «Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса». М.: ИКИ РАН, 14-18 ноября 2011 г. URL: <http://d902.iki.rssi.ru/theses-cgi/thesis.pl?id=2647>