

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

**А.Г. Тучин, С.В. Комовкин, С.М. Лавренов,
Д.А. Тучин, В.С. Ярошевский**

**Небесно-механическая интерпретация
радиотехнических измерений наклонной
дальности и радиальной скорости**

Москва — 2013

Тучин А.Г., Комовкин С.В., Лавренов С.М., Тучин Д.А., Ярошевский В.С.

Небесно-механическая интерпретация радиотехнических измерений наклонной дальности и радиальной скорости

Небесно-механическая интерпретация представляет собой вычисление значений параметров движения космического аппарата из измеряемых величин, полученных на наземных измерительных пунктах. Рассмотрены модели измерений наклонной дальности и радиальной скорости. Особое внимание уделено использованию эффекта Доплера. Исследованы беззапросные, запросные и трёхпутевые доплеровские измерения. Рассмотрены поправки на влияние среды прохождения сигнала. Исследованы модели ионосферной и тропосферной ошибок.

Ключевые слова: радиотехнические измерения, эффект Доплера, небесно-механическая интерпретация

Tuchin A.G., Komovkin S.V., Lavrenov S.M., Tuchin D.A., Yaroshevsky V.S.

Celestial mechanics interpretation of radio measurements of slant range and radial velocity

Celestial mechanics interpretation is defined as calculation parameters of spacecraft motion from observed quantities obtained at the tracking stations. The range and range rate models are considered. Particular attention has been paid to the Doppler effect. One-way, two-way and three-way Doppler measurements are investigated. Results are given for media corrections for the computed values of the observables. The ionospheric and tropospheric errors of measurements have been studied.

Key words: radio measurements, Doppler effect, celestial mechanics interpretation

1. ВВЕДЕНИЕ

Траекторные измерения орбиты космического аппарата (КА) и их обработка включают несколько этапов:

- получение первичных измерений;
- отбраковка аномальных измерений;
- небесно-механическая интерпретация измерений;
- вычисление вектора состояния КА на основе серии измерений, а также определение других параметров.

Небесно-механическая интерпретация представляет собой получение из измеряемых величин значений параметров движения КА и учёт систематических ошибок, возникающих из-за свойств среды или оборудования.

Предметом препринта является этап небесно-механической интерпретации измерений наклонной дальности и радиальной скорости. Другие типы измерений, например, измерения углового положения КА, не рассматриваются.

Возросшая точность измерений требует применения релятивистской небесной механики.

Основой небесно-механической интерпретации траекторных измерений являются функции, которые связывают параметры движения КА с измеряемыми радиотехническими параметрами. Такие функции принято называть *расчётными аналогами*. Основное требование при разработке расчётных аналогов состоит в сохранении исходной точности измерений. При пересчёте измеренных параметров в величину, соответствующую расчётному аналогу, учитываются задержки и преобразования частот в наземных и бортовых радиокомплексах, а также поправки, компенсирующие искажения, вносимые тропосферой и ионосферой Земли. Задача определения орбиты использует механику Ньютона с поправками, учитывающими релятивистские эффекты.

Для полёта к Фобосу в 1988-89 гг. и последующих полётов к Марсу была создана наземная радиотехническая система «Квант-Д» [1]. Возможности этой системы были использованы в полном объёме в работе по баллистико-навигационному обеспечению полётов КА «Фобос-1,2». Траекторные измерения проводились на измерительных пунктах в Евпатории и Уссурийске. Вопросы небесно-механической интерпретации измерений этой системы рассмотрены в [2].

При подготовке к запуску КА «Фобос-Грунт» [3] в Уссурийске был создан наземный радиотехнический комплекс (НРТК) нового поколения «Фобос», а в посёлке Медвежьи Озёра комбинированный НРТК «Кобальт-Фобос». Кроме того, в посёлке Медвежьи Озёра и на космодроме Байконур были созданы НРТК «Спектр-Х» с 12-метровыми антеннами, обеспечивающими работу с КА на приземном участке [1]. В настоящее время НРТК «Фобос» успешно использован в ходе баллистико-навигационного обеспечения полёта КА «Спектр-Р» [4]. Указанные системы работают в X-

диапазоне. Они будут использованы в проектах космических полётов к Луне и другим небесным телам Солнечной системы, входящих в Российскую космическую программу.

В этой публикации рассмотрены методы небесно-механической интерпретации траекторных измерений для некоторой обобщённой радиотехнической системы. Но они вполне применимы для интерпретации измерений НРТК нового поколения.

2. ИЗМЕРЕНИЯ НАКЛОННОЙ ДАЛЬНОСТИ

Под измерениями наклонной дальности понимают измерения задержки сигнала по трассе: *передающая антенна – КА – приёмная антенна*. В эту задержку входят:

- время распространения сигнала между положениями наземных антенн и КА в моменты времени излучения наземной антенной, переизлучения на борту КА и приёма сигнала наземной антенной;
- задержки сигнала в наземных и бортовых радиокомплексах;
- дополнительная задержка, связанная с рефракцией сигнала в атмосфере Земли.

Для измерения дальности используется специальный дальномерный сигнал. В современных радиотехнических системах [1] этот сигнал изменяет фазу сигнала несущей частоты. В алгоритмах обработки важна минимальная частота f_{\min} дальномерного сигнала, которая используется для разрешения неоднозначности. Пусть время прохождения сигнала по трассе *передающая антенна – КА – приёмная антенна* составляет величину Δt . Измеряемой величиной является Δt_m , которая связана с Δt следующим соотношением:

$$\Delta t = \Delta t_m + q \cdot \frac{1}{f_{\min}}$$

где q – неотрицательное целое число. Перед последующей обработкой должна быть раскрыта неоднозначность измерения, т.е. определено значение q . Для этого можно использовать априорное значение задержки Δt_a :

$$q = \text{round}(f_{\min} (\Delta t_a - \Delta t_m))$$

где функция $\text{round}(x)$ возвращает ближайшее целое к своему аргументу x . В современных радиотехнических системах величина f_{\min} составляет приблизительно 150 Гц. Таким образом, для правильного раскрытия неоднозначности ошибка прогноза наклонной дальности не может превосходить 2000 км. К сожалению, такое требование не всегда выполняется. Поэтому перед процедурой раскрытия параметры движения КА должны быть уточнены по доплеровским измерениям радиальной скорости. Вместе с тем, может возникнуть ситуация, в которой эти измерения отсутствуют или аномальны. В этом случае можно использовать нераскрытые измерения наклонной дальности для формирования измерений скорости. Такие измерения

будут иметь ошибку в десятки сантиметров в секунду. Однако такой точности в большинстве случаев достаточно, чтобы определить параметры движения с точностью, требуемой для раскрытия неоднозначности. Такая ситуация возникла при первых определения параметров движения КА «Радиоастрон».

Задержка сигнала в бортовом радиокомплексе измеряется до начала полёта. Измеряются её значения в зависимости от комплектации бортовых приборов радиокомплекса (используется основной или резервный блок) и температуры на борту. При интерпретации на Земле используются параметры, передаваемые в составе телеметрической информации для восстановления условий на борту в момент переизлучения сигнала.

Для удовлетворения требованиям перспективных КА исследования Солнечной системы, в которых среднеквадратичное отклонение (СКО) ошибки измерений дальности должны составлять единицы метров, ошибка определения значения бортовой задержки по данным телеметрии не должна превосходить значения $3 \cdot 10^{-9}$ с (т.е. чтобы ошибка не превосходила 1 м). Для выполнения научных задач полёта перспективных КА необходимо обеспечить измерения дальности при удалении от Земли на расстояние до 35 а.е.

После исключения всех дополнительных задержек расчётный аналог измерения дальности имеет вид:

$$D = \frac{D_1 + D_2}{2} = c \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{2} \quad (1)$$

где

Δt_1 – время распространения сигнала от излучающей антенны измерительного пункта (ИП) до КА;

Δt_2 – время распространения сигнала от КА до приёмной антенны;

c – скорость света.

Время распространения радиосигнала между фиксированными точками (t_b, \vec{r}_b) и (t_e, \vec{r}_e) для статического сферически симметричного гравитационного поля Солнца с метрикой Шварцшильда представляется суммой расстояния между \vec{r}_b и \vec{r}_e и релятивистской поправки [5]:

$$c(t_e - t_b) = |\vec{r}_e - \vec{r}_b| + \frac{2\mu_s}{c^2} \ln \frac{|\vec{r}_e| + |\vec{r}_b| + |\vec{r}_e - \vec{r}_b|}{|\vec{r}_e| + |\vec{r}_b| - |\vec{r}_e - \vec{r}_b|} \quad (2)$$

где μ_s – гравитационный параметр Солнца.

Пусть

t_1 – момент излучения сигнала;

t_2 – момент переизлучения сигнала на борту КА;

t_3 – момент приёма сигнала;

$r_{\text{snd}}(t_1)$ – гелиоцентрическое положение излучающей антенны в момент излучения сигнала t_1 (snd – sender – излучатель);

- $r_{sc}(t_2)$ – гелиоцентрическое положение КА в момент переизлучения сигнала (sc – spacecraft – космический аппарат);
 $r_{rcv}(t_3)$ – гелиоцентрическое положение приёмной антенны в момент регистрации сигнала (rcv – receiver – получатель).

Используя формулу (2), получим соотношения:

$$\begin{aligned}\Delta t_1 &= \frac{1}{c} |\vec{r}_{sc}(t_2) - \vec{r}_{snd}(t_1)| + \Delta D_1, \\ \Delta t_2 &= \frac{1}{c} |\vec{r}_{sc}(t_2) - \vec{r}_{rcv}(t_3)| + \Delta D_2, \\ t_2 &= t_1 + \Delta t_1, \\ t_3 &= t_2 + \Delta t_2 = t_1 + \Delta t_1 + \Delta t_2,\end{aligned}\tag{3}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta D_1 &= \frac{2\mu_S}{c^2} \ln \frac{|\vec{r}_{sc}(t_2)| + |\vec{r}_{snd}(t_1)| + |\vec{r}_{sc}(t_2) - \vec{r}_{snd}(t_1)|}{|\vec{r}_{sc}(t_2)| + |\vec{r}_{snd}(t_1)| - |\vec{r}_{sc}(t_2) - \vec{r}_{snd}(t_1)|}, \\ \Delta D_2 &= \frac{2\mu_S}{c^2} \ln \frac{|\vec{r}_{sc}(t_2)| + |\vec{r}_{rcv}(t_3)| + |\vec{r}_{sc}(t_2) - \vec{r}_{rcv}(t_3)|}{|\vec{r}_{sc}(t_2)| + |\vec{r}_{rcv}(t_3)| - |\vec{r}_{sc}(t_2) - \vec{r}_{rcv}(t_3)|}.\end{aligned}$$

Подставляя (3) в (1), получим:

$$D = \frac{1}{2} (|\vec{r}_{sc}(t_2) - \vec{r}_{snd}(t_1)| + |\vec{r}_{sc}(t_2) - \vec{r}_{rcv}(t_3)| + \Delta D_1 + \Delta D_2)$$

Сумма $(\Delta D_1 + \Delta D_2)/2$ рассматривается как поправка.

Измерительная система обеспечивает только регистрацию момента приёма сигнала t_3 . Моменты времени t_2 и t_1 должны быть найдены из световых уравнений:

$$\begin{aligned}t_2 &= t_3 - \frac{|\vec{r}_{sc}(t_2) - \vec{r}_{rcv}(t_3)|}{c} - \frac{\Delta D_2}{2c}, \\ t_1 &= t_2 - \frac{|\vec{r}_{sc}(t_2) - \vec{r}_{snd}(t_1)|}{c} - \frac{\Delta D_1}{2c}.\end{aligned}$$

Эти уравнения решаются итерационным способом последовательно: сначала определяется t_2 , а затем t_1 . А именно, для определения момента времени t_2 необходимо выполнить следующие действия:

- 1) Принять $t_2^{(0)} = t_3$.
- 2) Повторять вычисления для $t_2^{(i)}$ ($i \geq 1$) по формуле:

$$t_2^{(i+1)} = t_3 - \frac{|\vec{r}_{sc}(t_2^{(i)}) - \vec{r}_{rcv}(t_3)|}{c} - \frac{\Delta D_2(\vec{r}_{sc}(t_2^{(i)}), \vec{r}_{rcv}(t_3))}{2c}\tag{4}$$

до выполнения условия:

$$\left| t_2^{(i+1)} - t_2^{(i)} \right| \leq \eta,$$

где η является некоторой малой величиной. После этого можно положить $t_2 = t_2^{(i+1)}$.

Для нахождения момента времени t_1 нужно выполнить следующую последовательность действий:

3) Положить $t_1^{(0)} = t_2$ и вычислять

$$t_1^{(i+1)} = t_2 - \frac{\left| \vec{r}_{sc}(t_2) - \vec{r}_{snd}(t_1^{(i)}) \right|}{c} - \frac{\Delta D_{1R}(\vec{r}_{rc}(t_2), \vec{r}_{snd}(t_1^{(i)}))}{2c} \quad (5)$$

до выполнения условия $\left| t_1^{(i+1)} - t_1^{(i)} \right| \leq \eta$. После этого следует положить $t_1 = t_1^{(i+1)}$.

При выполнении расчётов полагается, что $\eta \sim 10^{-6}$ с. При этом для нахождения приемлемых значений необходимо делать в (4) и (5) две – три итерации.

Заметим, что решение уравнений (4) и (5) производится в ходе итерационного процесса определения эфемерид КА [6]. При вычислении $\vec{r}_{sc}(t)$ используется эфемериды КА текущей итерации. При вычислении положений приёмной $\vec{r}_{rcv}(t_3)$ и передающей $\vec{r}_{snd}(t_1)$ антенн используется теория прецессии-нутаии, например, IAU2000 [7].

Решение светового уравнения, учитывающее наличие различных шкал времени, используемых при регистрации сигнала и моделировании движения КА, рассмотрено в [8].

3. ДОПЛЕРОВСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ РАДИАЛЬНОЙ СКОРОСТИ КА

3.1. Измерения на основе эффекта Доплера

Радиальная скорость измеряется на основе эффекта Доплера. Излучается сигнал с частотой f_{snd} . Он принимается КА с частотой $f_{snd} + \Delta f_{D1}$. Здесь Δf_{D1} – доплеровский сдвиг частоты на трассе *передающая антенна – КА*. Этот сигнал ретранслируется бортовой аппаратурой КА с частотой, умноженной на фиксированный коэффициент M_2 (чтобы исключить интерференцию). Этот сигнал поступает на приёмную антенну с частотой $f_{rcv} = M_2(f_{snd} + \Delta f_{D1}) + \Delta f_{D2}$. Здесь Δf_{D2} – доплеровский сдвиг частоты на трассе *КА – приёмная антенна*. Принятый сигнал преобразуется в сигнал промежуточной частоты $f_{med} = f_{rcv} - f_h$. Здесь f_h – суммарная частота всех гетеродинов. Она выбирается так, чтобы при всех возможных доплеровских сдвигах частота f_{med} была больше нуля. При нулевом доплеровском сдвиге f_{med} равна номинальному значению f_{med}^{nom} (примерно 70 МГц). При известных f_{med} и f_{med}^{nom}

можно найти суммарный доплеровский сдвиг $M_2 \Delta f_{D1} + \Delta f_{D2} = f_{\text{med}} - f_{\text{med}}^{\text{nom}}$. На основе доплеровского сдвига вычисляют радиальную скорость, как будет объяснено далее.

Имеется два способа измерения промежуточной частоты: измерение её мгновенного значения или измерение набега нециклической, т.е. неограниченной значением 2π , фазы сигнала промежуточной частоты. Более точным является второй способ, при котором СКО ошибок измерений меньше на порядок по сравнению с первым. В современных радиотехнических системах [1] измеряют набег фазы сигнала доплеровского сдвига. Этот способ будет рассмотрен далее. Полный набег нециклической фазы можно представить в следующем виде:

$$\varphi(t_{\text{mb}}, t_{\text{me}}) = \int_{t_{\text{mb}}}^{t_{\text{me}}} f_{\text{med}}(t) dt$$

Здесь t_{mb} – начало, а t_{me} – конец интервала накопления.

Основным типом доплеровских измерений радиальной скорости являются запросные доплеровские измерения. При управлении полётом наряду с запросными траекторными измерениями используются беззапросные измерения радиальной скорости и более сложные типы измерений доплеровского сдвига частоты, в котором одновременно участвуют два измерительных пункта. При проведении запросных измерений один измерительный пункт излучает и принимает сигнал, а другой только принимает сигнал, излучаемый с борта КА. Если при проведении беззапросных доплеровских измерений приём обеспечивают одновременно два пункта, то при использовании разности измерений, получаемых с двух пунктов, из измеряемой величины будет исключён неизвестный уход бортового задающего генератора.

3.2. Запросные измерения радиальной скорости

Наземная радиотехническая система измеряет доплеровское смещение частоты принимаемого сигнала относительно излучаемого. Измеряемой величиной является полный набег нециклической, т.е. неограниченной значением 2π , фазы сигнала промежуточной частоты на интервале накопления. Частота этого сигнала равна разности частот принятого сигнала и сигнала, сформированного по прогнозу доплеровского сдвига. Среднее значение набега фазы сигнала промежуточной частоты пересчитывается по конечным формулам в среднее значение отношения принимаемой частоты к передаваемой. Это отношение называют доплеровским множителем. Поэтому можно считать, что радиотехническая система проводит измерения среднего значения доплеровского множителя \bar{A} на интервале времени Δt . Получим соотношение, которое связывает \bar{A} с моментами времени излучения и приёма сигналов. Для этого рассмотрим (рис. 1) инерциальную гелиоцентрическую систему координат и мировые линии КА и измерительного пункта.

Пусть:

- τ – время по часам измерительного пункта;
- $t^*(t)$ – координатное время излучения сигнала, полученного на измерительном пункте в момент координатного времени t ;
- $\tau^*(\tau)$ – время излучения сигнала по часам измерительного пункта, полученного на измерительном пункте в момент τ его собственного времени;
- $\Delta\tau$ – интервал времени по часам измерительного пункта, на котором определяется полное приращение фазы доплеровского сдвига.

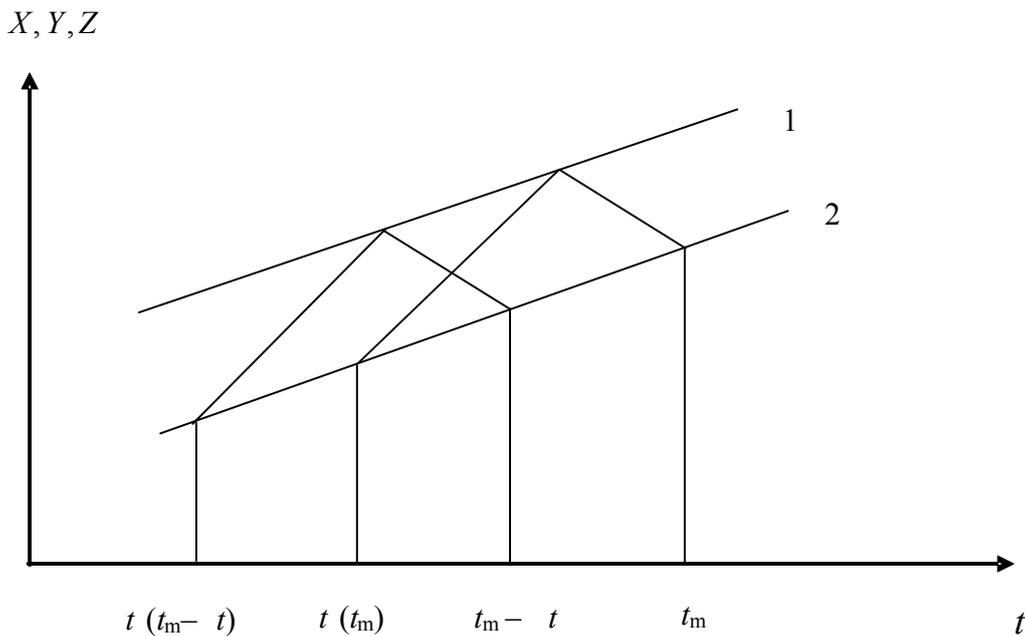


Рис. 1. 1 – мировая линия КА; 2 – мировая линия ИП; t_m – время регистрации измерения; Δt – интервал накопления

Тогда среднее значение доплеровского множителя, измеренное системой на интервале от $\tau_m - \Delta\tau$ до τ_m , можно представить в виде:

$$\bar{A} = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau_m - \Delta\tau}^{\tau_m} \frac{d\tau^*}{d\tau} d\tau = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau_m - \Delta\tau}^{\tau_m} d\tau^* = \frac{\tau^*(\tau_m) - \tau^*(\tau_m - \Delta\tau)}{\Delta\tau}$$

Таким образом, среднее значение доплеровского множителя равно отношению длительности интервала излучения к длительности интервала приёма.

Длительности интервалов приёма и излучения в собственном времени измерительного пункта связаны с соответствующими длительностями интервалов в координатном времени следующими соотношениями [5]:

$$\Delta\tau = \left(1 - \frac{\mu_S}{c^2 r_{\text{rcv}}(\tau - \Delta\tau)} - \frac{v_{\text{rcv}}^2(\tau - \Delta\tau)}{2c^2} \right) \Delta t,$$

$$\tau^*(\tau) - \tau^*(\tau_m - \Delta\tau) = \left(1 - \frac{\mu_S}{c^2 r_{\text{rcv}}(\tau^*(\tau_m - \Delta\tau))} - \frac{v_{\text{rcv}}^2(\tau^*(\tau_m - \Delta\tau))}{2c^2} \right) \cdot (t^*(t_m) - t^*(t_m - \Delta t)),$$

где

$r_{\text{rcv}}(\tau - \Delta\tau)$, $v_{\text{rcv}}(\tau - \Delta\tau)$ – модули гелиоцентрических положения и скорости измерительного пункта на начало интервала приёма;

$r_{\text{rcv}}(\tau^*(\tau_m - \Delta\tau))$, $v_{\text{rcv}}(\tau^*(\tau_m - \Delta\tau))$ – модули гелиоцентрических положения и скорости измерительного пункта на начало интервала излучения.

Так как модули гелиоцентрических положения и скорости измерительного пункта на начало интервала излучения практически совпадают с соответствующими величинами на начало интервала приёма, будем рассматривать отношение \bar{A} длительности интервала излучения к длительности интервала приёма по координатному времени:

$$\bar{A} = \frac{t^*(t_m) - t^*(t_m - \Delta t)}{\Delta t}$$

Среднее значение доплеровского множителя используется для вычисления мгновенного значения радиальной скорости на середину мерного интервала и приращения дальности.

3.3. Интерпретация измерения в виде мгновенного значения радиальной скорости

В этом пункте будет показано, что мгновенное значение радиальной скорости на момент времени, соответствующий середине интервала накопления Δt , определяется следующим соотношением [9]:

$$\bar{D}\left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right) = c \frac{1 - \bar{A}}{1 + \bar{A}}, \quad (6)$$

где расчётный аналог $\dot{D}\left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right)$ определяется по формуле:

$$\dot{D}\left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right) = \frac{\dot{D}_{1K} - \dot{D}_{1H} + \dot{D}_{2H} - \dot{D}_{2K}}{2},$$

$\dot{D}_{1H} = \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{v}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$ – проекция скорости передающей антенны в момент

излучения на линию визирования: *передающая антенна – КА*;

$\dot{D}_{1K} = \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{v}_2)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$ – проекция скорости КА в момент переизлучения на линию

визирования: *передающая антенна – КА*;

$\dot{D}_{2K} = \frac{(\vec{r}_3 - \vec{r}_2, \vec{v}_2)}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}$ – проекция скорости КА в момент переизлучения на линию

визирования: *КА – приёмная антенна*;

$\dot{D}_{2H} = \frac{(\vec{r}_3 - \vec{r}_2, \vec{v}_3)}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}$ – проекция скорости приёмной антенны в момент приёма

сигнала на линию визирования: *КА – приёмная антенна*;

$\vec{r}_1(x_1, y_1, z_1)$ – вектор положения передающей антенны на момент передачи;

$\vec{r}_2(x_2, y_2, z_2)$ – вектор положения КА на момент переизлучения;

$\vec{r}_3(x_3, y_3, z_3)$ – вектор положения приёмной антенны ИП на момент приёма;

$\vec{v}_1 = \frac{d}{dt_1} \vec{r}_1$ – производная вектора положения передающей антенны на момент

излучения сигнала t_1 ;

$\vec{v}_2 = \frac{d}{dt_2} \vec{r}_2$ – производная вектора положения КА на момент переизлучения

сигнала t_2 ;

$\vec{v}_3 = \frac{d}{dt_3} \vec{r}_3$ – производная вектора положения приёмной антенны на момент

приёма сигнала t_3 .

Эти векторы представлены на рис. 2 для передающей (ПРД) и приёмной (ПРМ) антенн. Показаны положение и скорость ПРД (\vec{r}_1, \vec{v}_1), КА (\vec{r}_2, \vec{v}_2) и ПРМ (\vec{r}_3, \vec{v}_3), используемые в расчёте мгновенного значения радиальной скорости. Линии визирования: *передающая антенна – КА* ($\vec{r}_2 - \vec{r}_1$) и *КА – приёмная антенна* ($\vec{r}_3 - \vec{r}_2$)

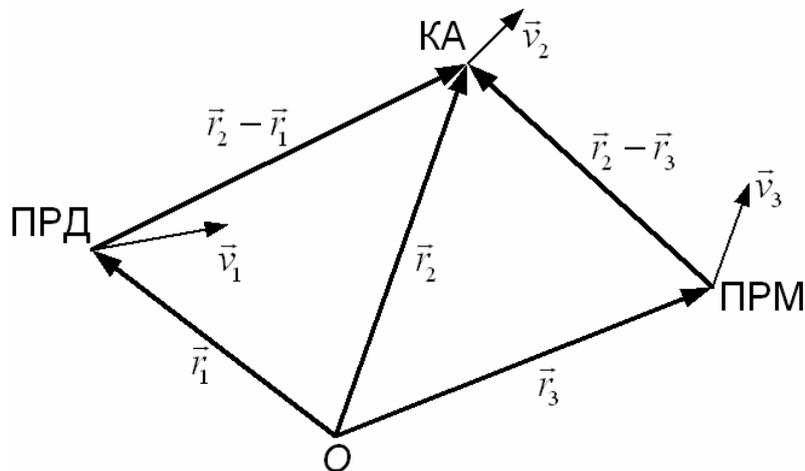


Рис. 2. Положение и скорость ПРД, КА и ПРМ

Чтобы обосновать соотношения интерпретации, найдём выражение для $\frac{dt^*}{dt}$ через проекции скоростей на линии визирования: *передающая антенна* – КА и КА – *приёмная антенна*.

Рассмотрим соотношение для времени распространения сигнала между КА и приёмной антенной:

$$c(t_3 - t_2) = |\vec{r}_3(t_3) - \vec{r}_2(t_2)| + \frac{\mu_S}{c^2} \Delta(t_3, t_2)$$

где

$$\Delta(t_3, t_2) = 2 \ln \frac{|\vec{r}_3| + |\vec{r}_2| + |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}{|\vec{r}_3| + |\vec{r}_2| - |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}$$

Дифференцируя по t_3 , получим:

$$c \left(1 - \frac{dt_2}{dt_3} \right) = \left(v_3 - v_2 \frac{dt_2}{dt_3}, \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \right) + \frac{\mu_S}{c^2} \frac{dt}{dt_3} \Delta(t_3, t_2)$$

$$\frac{dt_2}{dt_3} \left(\left(\vec{v}_2, \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \right) - c \right) = \left(\left(\vec{v}_3, \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \right) - c \right) + \frac{\mu_S}{c^2} \frac{dt}{dt_2} \Delta(t_3, t_2)$$

После преобразований получим:

$$\frac{dt_2}{dt_3} = \frac{\dot{D}_{2H} - c}{\dot{D}_{2K} - c} + \frac{\mu_S}{c^2 (\dot{D}_{2K} - c)} \frac{dt}{dt_3} \Delta(t_3, t_2)$$

Рассмотрим теперь соотношение для времени распространения сигнала между передающей антенной и КА:

$$c(t_2 - t_1) = |\vec{r}_2(t_2) - \vec{r}_1(t_1)| + \frac{\mu_S}{c^2} \Delta(t_2, t_1), \quad (7)$$

где

$$\Delta(t_2, t_1) = 2 \ln \frac{|\vec{r}_2| + |\vec{r}_1| + |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}{|\vec{r}_2| + |\vec{r}_1| - |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}.$$

Дифференцируя это соотношение по t_1 , получим:

$$\frac{dt_2}{dt_1} = \frac{\dot{D}_{1K} - c}{\dot{D}_{1H} - c} + \frac{\mu_S}{c^2 (\dot{D}_{1H} - c)} \frac{dt}{dt_1} \Delta(t_2, t_1).$$

Без учёта релятивистских поправок получим:

$$\frac{dt_3}{dt_1} = \frac{(\dot{D}_{1K} - c)(\dot{D}_{2H} - c)}{(\dot{D}_{1H} - c)(\dot{D}_{2K} - c)}. \quad (8)$$

С точностью до членов, содержащих $\frac{1}{c^2}$, выражение (8) может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dt^*}{dt} = & 1 - \frac{\dot{D}_{1K} - \dot{D}_{1H} + \dot{D}_{2H} - \dot{D}_{2K}}{c} + \\ & + \frac{(\dot{D}_{1H} + \dot{D}_{2K})(\dot{D}_{1H} + \dot{D}_{2H} - \dot{D}_{1K} - \dot{D}_{2K})}{c^2} + \\ & + \frac{\dot{D}_{1K}\dot{D}_{2H} - \dot{D}_{1H}\dot{D}_{2K}}{c^2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{A} = & \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \frac{dt^*}{dt} dt = 1 - \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \frac{\dot{D}_{1K} - \dot{D}_{1H} + \dot{D}_{2H} - \dot{D}_{2K}}{c} dt + \\ & + \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \left(\frac{(\dot{D}_{1H} + \dot{D}_{2K})(\dot{D}_{1H} + \dot{D}_{2H} - \dot{D}_{1K} - \dot{D}_{2K})}{c^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\dot{D}_{1K}\dot{D}_{2H} - \dot{D}_{1H}\dot{D}_{2K}}{c^2} \right) dt \end{aligned}$$

Введём обозначение для среднего значения радиальной скорости на мерном интервале:

$$\bar{D} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \dot{D} dt.$$

Для вывода формулы (6) рассмотрим выражение:

$$\frac{1 - \bar{A}}{1 + \bar{A}}$$

После преобразований с точностью до членов, содержащих $\frac{1}{c^2}$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \bar{A}}{1 + \bar{A}} = & \frac{\bar{D}}{c} + \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \frac{\dot{D}_{1K}^2 - \dot{D}_{1H}^2 - \dot{D}_{2K}^2 + \dot{D}_{2H}^2}{4c^2} dt + \\ & + \left(\frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \frac{\dot{D}}{c} dt \right)^2 - \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \frac{\dot{D}^2}{c^2} dt. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\dot{D} \left(t_m - \frac{\Delta t}{2} \right) \approx c \frac{1 - \bar{A}}{1 + \bar{A}} \quad (9)$$

с погрешностью

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \frac{\dot{D}_{1K}^2 - \dot{D}_{1H}^2 - \dot{D}_{2K}^2 + \dot{D}_{2H}^2}{4c} dt +$$

$$+ \frac{1}{c} \left[\left(\frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \dot{D} dt \right)^2 - \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \dot{D}^2 dt \right]$$

Получим соотношение между средним и мгновенным значениями радиальной скорости.

Представим зависимость от времени радиальной скорости в окрестности средней точки интервала в виде ряда Тейлора:

$$\dot{D}(t) = \dot{D}\left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right) + \ddot{D}\left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right) \left(t - \left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right)\right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \ddot{D}\left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right) \left(t - \left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right)\right)^2 + \dots \quad (10)$$

где t_m – время регистрации (конец интервала накопления); Δt – интервал накопления.

После интегрирования по времени на интервале от $t_m - \Delta t$ до t_m левой и правой частей соотношения (10) получим:

$$\int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \dot{D}(t) dt = \dot{D}\left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right) \cdot \Delta t + \ddot{D}\left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right) \cdot \frac{\Delta t^3}{24} + \dots$$

Следовательно,

$$\bar{\dot{D}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \dot{D}(t) dt = \dot{D}\left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right) + \ddot{D}\left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right) \cdot \frac{\Delta t^2}{24} + \dots \quad (11)$$

Откуда,

$$\bar{\dot{D}} \approx \dot{D}\left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right)$$

с погрешностью

$$\ddot{D}\left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right) \cdot \frac{\Delta t^2}{24}.$$

Соединяя соотношения (9) и (11), получим окончательно, что формула (6) для небесно-механической интерпретации радиальной скорости имеет вид:

$$\dot{D}\left(t_m - \frac{\Delta t}{2}\right) = c \frac{1 - \bar{A}}{1 + \bar{A}}$$

с погрешностью $\delta_{\dot{D}}$, которая вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} \delta_{\dot{D}} = & \left| \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \frac{\dot{D}_{1К}^2 - \dot{D}_{1Н}^2 - \dot{D}_{2К}^2 + \dot{D}_{2Н}^2}{4c} dt + \right. \\ & \left. + \frac{1}{c} \left[\left(\frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \dot{D} dt \right)^2 - \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \dot{D}^2 dt \right] + \right. \\ & \left. + \left| \ddot{D} \left(t_m - \frac{\Delta t}{2} \right) \cdot \frac{\Delta t^2}{24} \right|. \right. \end{aligned}$$

На интервале типового сеанса измерений (ориентировочно 10 мин) погрешность будет иметь характер систематической ошибки.

В большинстве случаев на орбитах перелёта и орбитах искусственных спутников планет погрешность $\delta_{\dot{D}}$ не превосходит 0.01 мм/с. В этих случаях можно интерпретировать измерения радиальной скорости в виде мгновенного значения на середину мерного интервала. В случае проведения небесно-механических экспериментов или при необходимости прецизионного определения орбиты доплеровское измерение радиальной скорости следует интерпретировать в виде приращения дальности на мерном интервале. Это рассмотрено в следующем подразделе.

3.4. Интерпретация измерения в виде приращения дальности

В этом пункте будет показано, что разность дальностей на конец и начало интервала накопления по трассе *передающая антенна – КА – приёмная антенна* связана с измеренным значением следующим соотношением:

$$\frac{D(t_m) - D(t_m - \Delta t)}{\Delta t} = c(1 - \bar{A}) \quad (12)$$

где

$D(t_m)$ – расстояние, которое прошел сигнал, полученный в момент t_m , по трассе: *передающая антенна – КА – приёмная антенна*;

$D(t_m - \Delta t)$ – расстояние, которое прошел сигнал, полученный в момент $t_m - \Delta t$, по трассе: *передающая антенна – КА – приёмная антенна*.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} c(1 - \bar{A}) &= c \left(1 - \frac{t^*(t_m) - t^*(t_m - \Delta t)}{\Delta t} \right) = \\ &= c \left(\frac{t_m - t^*(t_m) - (t_m - \Delta t - t^*(t_m - \Delta t))}{\Delta t} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Из (12) следует (13), т.к.

$$D(t_m) = c(t_m - t^*(t_m)),$$

$$D(t_m - \Delta t) = c(t_m - \Delta t - t^*(t_m - \Delta t)).$$

3.5. Компенсация методической ошибки интерпретации запросных доплеровских измерений

Интерпретация запросного измерения радиальной скорости в виде мгновенного значения в силу её простоты более привлекательна, чем интерпретация в виде приращения дальности. Поэтому рассмотрим вопрос о внесении поправок, компенсирующих методическую погрешность интерпретации измеренного значения в виде мгновенного значения радиальной скорости. Вначале получим соотношение для методической ошибки интерпретации запросного доплеровского измерения в виде мгновенного значения радиальной скорости. Пусть $\dot{D}(t_0)$ – мгновенное значение радиальной скорости, соответствующее моменту регистрации t_0 , а $D\left(t_0 - \frac{\Delta t}{2}\right)$ и $D\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right)$ – значения дальности по трассе *передающая антенна – КА – приёмная антенна* на моменты времени $t_0 - \frac{\Delta t}{2}$ и $t_0 + \frac{\Delta t}{2}$. Тогда, используя (7), можно получить среднее значение доплеровского множителя на интервале $\left[t_0 - \frac{\Delta t}{2}, t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right]$ в виде

$$\bar{A}(t_0) = 1 - \frac{D\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right) - D\left(t_0 - \frac{\Delta t}{2}\right)}{c \cdot \Delta t}$$

Этому среднему значению соответствует мгновенное значение радиальной скорости, вычисленное по формуле (9). Таким образом, для рассматриваемой методической ошибки справедливо соотношение:

$$N(t_0) = \dot{D}(t_0) - \frac{1 - \bar{A}(t_0)}{1 + \bar{A}(t_0)}$$

Обозначим $\tilde{N}(t_0)$ – значение методической ошибки, рассчитанное для опорной орбиты. Тогда, добавляя $\tilde{N}(t_0)$ к измеренному значению, можно компенсировать ошибку. Ответ на вопрос, насколько опорная орбита должна быть близка к реальной, чтобы поправка $\tilde{N}(t_0)$ обеспечила необходимую точность, дают частные производные по компонентам вектора состояния:

$$\frac{\partial \tilde{N}(t_0)}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{N}(t_0)}{\partial y}, \frac{\partial \tilde{N}(t_0)}{\partial z}, \frac{\partial \tilde{N}(t_0)}{\partial v_x}, \frac{\partial \tilde{N}(t_0)}{\partial v_y}, \frac{\partial \tilde{N}(t_0)}{\partial v_z}$$

Приведём максимальные значения производных для орбит на траектории перелёта: для производных по компонентам вектора положения эти значения не превышают $0.5 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-1}$, а для производных по компонентам вектора скорости – $0.5 \cdot 10^{-4}$ (безразмерная величина).

Таким образом, поправки, рассчитанные по опорной орбите, компенсируют методическую ошибку с необходимой точностью, если опорная орбита лежит в такой трубке, относительно уточнённой, что невязки компонент вектора скорости не превосходят 1 м/с, а компонент вектора положения – 1000 км.

3.6. Беззапросные измерения радиальной скорости

Беззапросный режим измерения радиальной скорости используется на участках проведения коррекций и манёвров. Особенность проведения траекторных измерений после включения двигательной установки состоит в том, что ошибки исполнения заданных импульсов могут приводить к таким ошибкам прогноза движения КА, при которых ошибка по частоте запросного сигнала превосходит ширину полосы пропускания бортового приёмника. В особенности, это существенно при выполнении манёвра торможения и выполнении других больших импульсов при маневрировании в сфере действия планеты-цели. Чтобы избежать таких ситуаций, на участках работы с КА непосредственно после включения двигательной установки предусмотрены сеансы измерений радиальной скорости в беззапросном режиме, проведение которых не требует вхождения в связь с КА по запросному сигналу. Несмотря на то, что ошибки измерений радиальной скорости в беззапросном режиме значительно больше аналогичных измерений в запросном режиме (из-за неточного знания частоты бортового задающего генератора), точность прогноза параметров движения КА, полученного с использованием беззапросных измерений, такова, что обеспечиваются условия проведения запросных измерений.

Так же, как и в случае когерентных измерений, измеряется среднее значение доплеровского множителя:

$$\bar{A}_2 = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau_m - \Delta\tau}^{\tau_m} \frac{d\tau_{sc}^*}{d\tau} d\tau \quad (14)$$

где

- τ – время регистрации сигнала по часам ИП;
- $\tau_{sc}^*(\tau)$ – время по часам КА, соответствующее моменту излучения сигнала, принятого на ИП в момент τ ;
- τ_m – конец интервала накопления по часам ИП;
- $\Delta\tau$ – длительность интервала накопления по часам ИП.

После вычисления правой части (14), получим:

$$\bar{A}_2 = \frac{\tau_{sc}^*(\tau_m) - \tau_{sc}^*(\tau_m - \Delta\tau)}{\Delta\tau} \quad (15)$$

Перейдем в гелиоцентрическую систему координат. Для этого преобразуем (15) к виду:

$$\bar{A}_2 = \frac{\tau_{sc}^*(\tau_m) - \tau_{sc}^*(\tau_m - \Delta\tau)}{\tau^*(\tau_m) - \tau^*(\tau_m - \Delta\tau)} \cdot \frac{\tau^*(\tau_m) - \tau^*(\tau_m - \Delta\tau)}{\Delta\tau} \quad (16)$$

где $\tau^*(\tau_m)$ – время по часам ИП, соответствующее моменту излучения сигнала, принятого на ИП в момент τ (τ_m – конец, а $\tau_m - \Delta\tau$ – начало мерного интервала).

Первый сомножитель в (16) представляет собой отношение интервалов времени между одними и теми же событиями, но в разных системах координат. Для наблюдателя, находящегося в инерциальной гелиоцентрической системе координат, справедливо следующее соотношение [5]:

$$\frac{\tau_{sc}^*(\tau_m) - \tau_{sc}^*(\tau_m - \Delta\tau)}{\tau^*(\tau_m) - \tau^*(\tau_m - \Delta\tau)} = 1 - \left(\frac{v_{sc}^2 - v_{rcv}^2}{2c^2} + \frac{\Phi_{sc} - \Phi_{rcv}}{c^2} \right) \quad (17)$$

где

- v_{sc}, v_{rcv} – модули скорости КА и приёмной антенны ИП в инерциальной гелиоцентрической системе координат;
- Φ_{sc}, Φ_{rcv} – гравитационные потенциалы в точках, в которых находятся КА и приёмная антенна.

Рассмотрим более подробно второй сомножитель в (16). Так как за время распространения сигнала от КА до приёмной антенны не изменились условия, определяющие параметры преобразования времени из системы координат ИП в инерциальную гелиоцентрическую систему координат, справедливо соотношение:

$$\frac{t^*(t_m) - t^*(t_m - \Delta t)}{\tau^*(\tau_m) - \tau^*(\tau_m - \Delta\tau)} = \frac{\Delta t}{\Delta\tau} \quad (18)$$

где

- t_m – время конца интервала накопления в инерциальной гелиоцентрической системе координат;
- $t^*(t)$ – время излучения сигнала, полученного в момент t в инерциальной гелиоцентрической системе координат, (t_m – конец, а $t_m - \Delta t$ – начало мерного интервала в инерциальной гелиоцентрической системе координат);
- Δt – интервал накопления в инерциальной гелиоцентрической системе координат.

Используя (17) и (18), преобразуем (16) к виду:

$$\begin{aligned}\bar{A}_2 &= \left(1 - \left(\frac{v_{sc}^2 - v_{rcv}^2}{2c^2} + \frac{\Phi_{sc} - \Phi_{rcv}}{c^2} \right) \right) \cdot \left(\frac{t^*(t_m) - t^*(t_m - \Delta t)}{\Delta t} \right) = \\ &= \left(1 - \left(\frac{v_{sc}^2 - v_{rcv}^2}{2c^2} + \frac{\Phi_{sc} - \Phi_{rcv}}{c^2} \right) \right) \cdot \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \frac{dt^*}{dt} dt.\end{aligned}\quad (19)$$

Среднее значение доплеровского множителя используется для интерпретации беззапросных доплеровских измерений в виде мгновенного значения радиальной скорости на середину мерного интервала.

На борту КА «Радиоастрон» установлен задающий генератор на основе водородного стандарта частоты. Этот генератор был использован для проведения беззапросных доплеровских измерений на частоте 8.4 ГГц (X-диапазон) наземным радиотехническим комплексом «Фобос» [1] в Уссурийске. Полученные точности измерений превышают точность когерентных измерений штатной системы в С-диапазоне.

3.7. Расчётный аналог беззапросного измерения радиальной скорости

Как и в случае запросных доплеровских измерений, можно получить соотношение для $\frac{dt^*}{dt}$ через проекции скоростей на линию визирования $KA -$

$ИП$ в гелиоцентрической системе координат:

$$\frac{dt^*}{dt} = \frac{c - \dot{D}_{2H}}{c - \dot{D}_{2K}} \quad (20)$$

где

$\dot{D}_{2K} = \frac{(\vec{r}_3 - \vec{r}_2, \vec{v}_2)}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}$ – проекция скорости КА в момент излучения на линию

визирования: $KA -$ приёмная антенна;

$\dot{D}_{2H} = \frac{(\vec{r}_3 - \vec{r}_2, \vec{v}_3)}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}$ – проекция скорости приёмной антенны в момент приёма

сигнала на линию визирования: $KA -$ приёмная антенна;

$\vec{r}_2(x_2, y_2, z_2)$ – вектор положения КА на момент излучения;

$\vec{r}_3(x_3, y_3, z_3)$ – вектор положения приёмной антенны ИП на момент приёма;

$\vec{v}_2 = \frac{d}{dt} \vec{r}_2$ – вектор скорости КА на момент излучения;

$\vec{v}_3 = \frac{d}{dt} \vec{r}_3$ – вектор скорости приёмной антенны ИП на момент приёма.

С точностью до членов, содержащих $\frac{1}{c^2}$, выражение (20) может быть представлено в виде:

$$\frac{dt^*}{dt} = \frac{1 - \frac{\dot{D}_{2H}}{c}}{1 - \frac{\dot{D}_{2K}}{c}} = 1 - \frac{\dot{D}_{2H}}{c} + \frac{\dot{D}_{2K}}{c} - \frac{\dot{D}_{2H} \cdot \dot{D}_{2K}}{c^2} = 1 - \frac{\bar{D}_2}{c} - \frac{\dot{D}_{2H} \cdot \dot{D}_{2K}}{c^2}, \quad (21)$$

где $\bar{D}_2 = \dot{D}_{2H} - \dot{D}_{2K}$ – радиальная скорость.

После подстановки (21) в (19) получим:

$$\bar{A}_2 = \left(1 - \left(\frac{v_{sc}^2 - v_{rcv}^2}{2c^2} + \frac{\Phi_{sc} - \Phi_{rcv}}{c^2} \right) \right) \cdot \left(1 - \frac{\bar{D}_2}{c} - \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \frac{1}{c^2} \dot{D}_{2H}(t) \dot{D}_{2K}(t) dt \right). \quad (22)$$

С точностью до членов, содержащих $\frac{1}{c^2}$, выражение (22) может быть представлено в виде:

$$\bar{A}_2 = 1 - \frac{\bar{D}_2}{c} - \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \frac{\dot{D}_{2H}(t) \cdot \dot{D}_{2K}(t)}{c^2} dt - \left(\frac{v_{sc}^2 - v_{rcv}^2}{2c^2} + \frac{\Phi_{sc} - \Phi_{rcv}}{c^2} \right), \quad (23)$$

где

$$\bar{D}_2 = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} D_2(t) dt$$

Разрешив (23) относительно \bar{D}_2 , получим:

$$\bar{D}_2 = c(1 - A_2) - \frac{1}{\Delta t} \int_{t_m - \Delta t}^{t_m} \frac{\dot{D}_{2H}(t) \cdot \dot{D}_{2K}(t)}{c} dt - \left(\frac{v_{sc}^2 - v_{rcv}^2}{2c} + \frac{\Phi_{sc} - \Phi_{rcv}}{c} \right). \quad (24)$$

Соотношение (24) может быть использовано как для интерпретации измеренных значений, так и для определения текущего значения частоты бортового задающего генератора по эталонной орбите.

3.8. Измерения по схеме трёхпутевого Доплера

На наиболее ответственных участках полёта траекторные измерения проводятся по следующей схеме. Один измерительный пункт (например, Уссурийск) проводит сеанс запросных измерений. Другой измерительный пункт (в данном примере это Медвежьи Озёра) измеряет доплеровский сдвиг сигнала, излучаемого с борта КА. Совместная обработка измерений с двух измерительных пунктов позволит получить измерения доплеровского сдвига по двум трассам, в данном примере, *Уссурийск – КА – Уссурийск* и *Уссурийск – КА – Медвежьи Озёра*. Наличие двух трасс позволяет измерить скорость КА не только в радиальном направлении, но и в плоскости, ортогональной радиальному направлению, если использовать разность измеряемых величин доплеровского сдвига, полученных на разных измерительных пунктах. Такой

тип измерений называют трёхпутевым доплером (по числу путей, пройденным сигналом между измерительными пунктами и КА).

3.9. Разностные некогерентные доплеровские измерения

В работе [10] рассмотрены возможности использования разностных некогерентных доплеровских измерений для навигации в дальнем космосе. Беззапросные доплеровские измерения в литературе называют по-разному: самоходные измерения, некогерентные измерения, one-way Doppler (однопутевые доплеровские измерения). В работе [11] предполагается, что беззапросные доплеровские измерения выполняются, как полный нециклический набег фазы сигнала, полученного как разность между принятым с борта КА сигналом и сигналом с номинальной частотой бортового передатчика. Если сигнал принимается одновременно на двух станциях, то полученные измерения можно интерпретировать в виде разности приращений дальности:

$$\Delta_{1,2}D = D_1(t) - D_1(t - \Delta t) - D_2(t) + D_2(t - \Delta t)$$

где

- t – время регистрации сигнала;
- $D_1(t), D_2(t)$ – дальность до КА от измерительных пунктов 1 и 2;
- Δt – мерный интервал.

Ковариационный анализ [10] в предположениях, соответствующих исходным данным для траектории перелета к Марсу КА «Mars Pathfinder», показал эффективность этого типа измерений. Анализ выполнен для X-диапазона. СКО разностных измерений (1σ) предполагалась равной 0.05 мм/с. В [11] показана высокая эффективность этого типа измерений при комбинированном использовании с запросными измерениями.

Эффективность разностных некогерентных измерений объясняет соотношение [11], которое приближенно связывает разность $D_2(t) - D_1(t)$ с геоцентрическим склонением (δ) КА и его геоцентрическим прямым восхождением (α):

$$D_1 - D_2 \approx L_{1,2} \cos \delta \cos(\alpha_{1,2} - \alpha) + z_{1,2} \sin \delta$$

где

- $L_{1,2}$ – величина проекции вектора, направленного от антенны 1 к антенне 2, на экваториальную плоскость Земли;
- $z_{1,2}$ – величина проекции вектора, направленного от антенны 1 к антенне 2, на направление, ортогональное плоскости экватора;
- $\alpha_{1,2}$ – прямое восхождение линии, проходящей от антенны 1 к антенне 2.

Таким образом, при использовании водородного стандарта частоты на борту КА метод разностных некогерентных доплеровских измерений может обеспечить точность измерений, сопоставимую с точностью, обеспечиваемую трёхпутевыми доплеровскими измерениями.

4. УЧЁТ ИОНОСФЕРНОЙ И ТРОПОСФЕРНОЙ СОСТАВЛЯЮЩИХ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

Основным параметром атмосферы, описывающим её влияние на распространение радиоволн в S-, X- и Qu-диапазонах является коэффициент преломления. С этой точки зрения атмосферу Земли можно разделить на две области: тропосферу и ионосферу. Коэффициент преломления в тропосфере зависит от давления, температуры и влажности. Коэффициент преломления в ионосфере зависит от электронной концентрации и частоты. Следствием того, что коэффициент преломления в ионосфере зависит от частоты, является различие коэффициентов преломления для фазовой и групповой скорости. При расчете поправки к доплеровским измерениям скорости следует учитывать коэффициент преломления для фазовой скорости, а при расчете поправки к измерениям дальности – для групповой.

В работе [13] показано, что в сферически слоистой атмосфере поправка на фазовый путь ΔL_Φ для сигнала, распространяемого с высоты H до поверхности, может быть вычислена по формуле:

$$\Delta L_\Phi = \int_0^H \frac{\Delta n(h) \cdot (R_3 + h)}{\sqrt{(R_3 + h)^2 - R_3 \cos \gamma}} dh, \quad (25)$$

где

$\Delta n(h)$ – отличие коэффициента преломления от 1;

R_3 – радиус Земли;

h – высота над поверхностью;

γ – угол места.

Используем это соотношение для получения поправок и оценок регулярных ошибок измерений дальности и скорости, вызванных тропосферой и ионосферой Земли.

4.1. Тропосферная составляющая ошибки

При расчете тропосферных поправок измерений наклонной дальности и радиальной скорости используется величина, равная поправке на фазовый путь сигнала, принимаемого в направлении на зенит. Эта величина вычисляется как интеграл от приведённого коэффициента преломления на интервале высот от поверхности до высоты тропосферы

$$\Delta R_t = \int_0^{h_t} (1 - n(h)) dh, \quad 1 - n(h) = 10^{-6} N(h),$$

где

$n(h)$ – коэффициент преломления,

$N(h)$ – приведенный коэффициент преломления,

h_t – высота тропосферы.

Величина ΔR_t равна тропосферной поправке к наклонной дальности в случае, когда КА находится в направлении зенита. Для расчёта этой величины используются различные модели зависимости приведённого коэффициента преломления от высоты $N(h)$.

Расчет тропосферных поправок для радиотехнических систем дальнего космоса в России проводился на основе модели [13], построенной на следующих фактах:

- на высоте 10 км величина приведённого коэффициента преломления почти постоянна, не зависит от времени года и времени суток, составляет величину ~ 93 ;
- у поверхности Земли приведённый коэффициент преломления зависит от температуры, давления, относительной влажности и вычисляется по формуле:

$$N_s = \frac{77.6}{T_s} \left(P_s + \frac{4810 B_s}{T_s} \right),$$

где

P_s – атмосферное давление у Земной поверхности, мбар;

T_s – температура у Земной поверхности, °К;

B_s – давление водяного пара у Земной поверхности, мбар, определяется по относительной влажности, которая измеряется непосредственно.

Зависимость приведённого коэффициента преломления от высоты выражается соотношением

$$N(h) = N_s e^{-\beta h}, \quad (26)$$

где h измеряется в км; коэффициент β определяется из условия постоянства

приведённого коэффициента преломления на высоте 10 км, $\beta = -\frac{1}{10} \ln \frac{93}{N_s}$.

В Deep Space Network (DSN) NASA для расчета тропосферной поправки используется модель [14-16], в которой были разделены «сухая» и «мокрая» составляющие. Приведённый коэффициент преломления в любой точке атмосферы имеет такую же зависимость от метеорологических параметров, как и у поверхности Земли:

$$N(h) = \frac{77.6}{T(h)} \left(P(h) + \frac{4810 B}{T(h)} \right) = \frac{77.6}{T(h)} P(h) + \frac{77.6 \cdot 4810 B}{T^2(h)}.$$

Первое слагаемое называют «сухой» компонентой («dry» refractivity) и обозначают $ND(h)$, второе слагаемое называют «мокрой» компонентой («wet» refractivity) и обозначают как $NW(h)$. Интеграл от $ND(h)$ обозначим как ΔR_{td} , а от $NW(h)$ как ΔR_{tw} . Таким образом,

$$\Delta R_{td} = \int_0^{h_t} ND(h) dh, \quad \Delta R_{tw} = \int_0^{h_t} NW(h) dh, \quad \Delta R_t = \Delta R_{td} + \Delta R_{tw}.$$

Известно, что $0.90 \leq \frac{\Delta R_{td}}{\Delta R_t} \leq 0.99$; $0.01 \leq \frac{\Delta R_{tw}}{R_t} \leq 0.1$.

Для вычисления ΔR_{td} используют следующую модель:

$$\Delta R_{td} = 77.6 \cdot P_s \left(\frac{R}{g} \right),$$

где

P_s – атмосферное давление у Земной поверхности, мбар;

R – универсальная газовая постоянная, Дж/(моль · К);

g – гравитационное ускорение, м/с²;

Получим формулу для расчета тропосферной поправки Δr_t измерений дальности, проводимых для угла места γ . Для этого подставим (26) в (25).

Учитывая, что $\frac{R_3}{R_3 + h} \approx 1$, получим:

$$\Delta r_t = \int_0^{H_T} \frac{N_0^* \cdot 10^{-6} \cdot e^{-\beta h}}{\sqrt{1 - \cos^2 \gamma}} dh = \frac{N_0^* \cdot 10^{-6} \cdot (1 - e^{-\beta H_T})}{\beta \sin \gamma} \approx \frac{N_0^* \cdot 10^{-6}}{\beta \sin \gamma} = \frac{\Delta R_t}{\sin \gamma}. \quad (27)$$

Поэтому, если величина ΔR_t известна с ошибкой, СКО которой составляет $\sigma_{\Delta R_t}$, СКО ошибки Δr_t составит величину: $\sigma_{\Delta r_t} = \frac{\sigma_{\Delta R_t}}{\sin \gamma}$.

При работе с КА «Фобос-2» значение тропосферной поправки составляло от 2 до 22 м и учитывалось при обработке измерений.

Тропосферная поправка измерений радиальной скорости, проводимых для угла места γ , получается дифференцированием по времени (27) и вычисляется по следующей формуле:

$$\Delta \dot{r}_t = \frac{\dot{\gamma} \cdot \cos \gamma \cdot \Delta R_t}{\sin^2 \gamma}.$$

Поэтому, если величина ΔR_t известна с ошибкой, СКО которой составляет $\sigma_{\Delta R_t}$, то СКО ошибки тропосферной поправки измерений радиальной скорости составит величину:

$$\sigma_{\Delta \dot{r}_t} = \frac{|\dot{\gamma}| \cdot \cos \gamma \cdot \sigma_{\Delta R_t}}{\sin^2 \gamma}.$$

Пусть в одном сеансе измерений для углов места γ_1 и γ_2 имеются измерения наклонной дальности и радиальной скорости. Найдём ковариационные связи между этими измерениями, обусловленные ошибками

знания σ_{td} и σ_{tw} – «сухой» и «мокрой» составляющих поправки на фазовый путь сигнала в направлении зенита.

$$\begin{aligned} \text{cov}[\delta r_t(\gamma_1)\delta r_t(\gamma_2)] &= \frac{\sigma_{td}^2 + \sigma_{tw}^2}{\sin \gamma_1 \cdot \sin \gamma_2}; \\ \text{cov}[\delta \dot{r}_t(\gamma_1)\delta \dot{r}_t(\gamma_2)] &= \frac{|\dot{\gamma}_1 \cdot \dot{\gamma}_2| \cdot \cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2}{\sin^2 \gamma_1 \cdot \sin^2 \gamma_2} (\sigma_{td}^2 + \sigma_{tw}^2); \\ \text{cov}[\delta r_t(\gamma_1)\delta \dot{r}_t(\gamma_2)] &= \frac{|\dot{\gamma}_2| \cdot \cos \gamma_2}{\sin^2 \gamma_1 \sin^2 \gamma_2} (\sigma_{td}^2 + \sigma_{tw}^2). \end{aligned}$$

4.2. Ионосферная составляющая ошибки

В модель ионосферной составляющей ошибки входят параметры, характеризующие электронную концентрацию в различных слоях ионосферы. Проведённые исследования позволили построить ряд моделей, описывающих изменение электронной концентрации в разных слоях ионосферы, однако точность, предоставляемая этими моделями, не позволяет использовать их для расчета ионосферных поправок траекторных измерений. Для расчёта поправок траекторных измерений целесообразно использовать двухчастотную схему. К сожалению, прямое использование такой схемы является сложным для технологии проведения траекторных измерений дальних космических аппаратов. Вместе с тем, использование GPS-станции, находящейся в окрестности антенны дальней космической связи и работающей на двух частотах, позволяет определить поправку ионосферной составляющей. Существующая в настоящее время сеть GPS-станций обеспечивает измерения электронной концентрации практически по всей поверхности Земли. Измеряемой величиной является полная электронная концентрация, обозначаемая как TEC (от Total Electron Content) [17]. Эта величина обозначает полное число электронов, содержащееся вдоль пути между двумя точками на площади сечения 1 м^2 в направлении зенита. Эта величина измеряется в единицах TECU. Единица TECU равна 10^{16} эл/м². Методы и алгоритмы реконструкции ионосферы по данным сети GPS-станций представлены в [12].

Для ионосферы Земли справедлива следующая модель зависимости приведённого коэффициента преломления для фазовой скорости распространения радиоволны Δn от высоты:

$$\Delta n(h) = -40.4 \frac{N_e(h)}{f^2},$$

где $N_e(h)$ – электронная концентрация, выраженная в $1/\text{м}^3$; f – частота сигнала, выраженная в Гц.

Коэффициент преломления n_{gr} для групповой скорости распространения радиоволны связан с коэффициентом преломления для фазовой скорости соотношением:

$$n_{gr} = n + f \frac{dn}{df}.$$

Отсюда получаем формулу для приведённого коэффициента преломления для групповой скорости:

$$\Delta n_{gr}(h) = 40.4 \frac{N_e(h)}{f^2}. \quad (28)$$

Таким образом, приведённые коэффициенты преломления для фазовой и групповой скорости равны по абсолютной величине, но имеют разные знаки.

Получим формулы для расчёта ионосферных поправок измерений наклонной дальности Δr_i в м и радиальной скорости $\Delta r r_i$ в м/с, проводимых для угла места γ и скорости его изменения $\dot{\gamma}$. Учтём, что для расчёта поправок к измерениям радиальной скорости следует использовать приведённый коэффициент преломления для фазовой скорости, а для поправок к измерениям наклонной дальности – для групповой скорости. Для этого подставим (28) в (25) и получим:

$$\Delta r_i = \frac{40.4}{f^2} \int_0^{h_i} \frac{N_e(h) \cdot (R_3 + h)}{\sqrt{(R_3 + h)^2 - R_3^2 \cos^2 \gamma}} dh,$$

где h_i – высота ионосферы.

Так как КА находится заведомо выше максимума электронной концентрации h_m , можно воспользоваться следующей оценкой [13]:

$$\int_0^{h_i} \frac{N_e(h) \cdot (R_3 + h)}{\sqrt{(R_3 + h)^2 - R_3^2 \cos^2 \gamma}} dh \approx \frac{R_3 + h_m}{\sqrt{(R_3 + h_m)^2 - R_3^2 \cos^2 \gamma}} \int_0^{h_i} N_e(h) dh.$$

В результате получим:

$$\Delta r_i = \frac{40.4}{f^2} \frac{R_3 + h_m}{\sqrt{(R_3 + h_m)^2 - R_3^2 \cos^2 \gamma}} \int_0^{h_i} N_e(h) dh. \quad (29)$$

Ошибка измерений радиальной скорости, вносимая ионосферой, определяется угловым перемещением луча *ИП–КА* по углу места и соответствует приведённому коэффициенту преломления для фазовой скорости. Поэтому ионосферная поправка для доплеровских измерений скорости получается изменением знака в правой части формулы (29) на плюс и последующим дифференцированием по времени:

$$\Delta \dot{r}_i = \frac{40.4}{f^2} \cdot \frac{(R_3 + h_m) \cdot R_3^2 \cos \gamma \cdot \sin \gamma \cdot \dot{\gamma}}{\left((R_3 + h_m)^2 - R_3^2 \cos^2 \gamma \right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{h_i} N_e(h) dh.$$

Ионосферная поправка в направлении зенита ($\gamma = 0$) для фазовой скорости равна

$$\Delta R_i = -\frac{40.4}{f^2} \int_0^{h_i} N(h) dh.$$

Через величину ΔR_i могут быть выражены ионосферные поправки к измерениям наклонной дальности и радиальной скорости, которые вычисляются по формулам:

$$\Delta r_i = \frac{\Delta R_i}{\sqrt{1 - \frac{R_3^2 \cos^2 \gamma}{(R_3 + h_m)^2}}}, \quad \Delta \dot{r}_i = \frac{R_3^2}{(R_3 + h_m)^2} \cdot \frac{\sin 2\gamma \cdot \dot{\gamma}}{2 \left(1 - \frac{R_3^2 \cos^2 \gamma}{(R_3 + h_m)^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \Delta R_i.$$

Пусть величина ΔR_i известна с ошибкой, СКО которой равно $\sigma_{\Delta R_i}$, тогда ошибки ионосферных поправок $\sigma_{\Delta r_i}$ к наклонной дальности и $\sigma_{\Delta \dot{r}_i}$ — к радиальной скорости вычисляются по следующим формулам:

$$\sigma_{\Delta r_i} = \frac{\sigma_{\Delta R_i}}{\sqrt{1 - \frac{R_3^2 \cos^2 \gamma}{(R_3 + h_m)^2}}}, \quad \sigma_{\Delta \dot{r}_i} = \frac{R_3^2}{(R_3 + h_m)^2} \cdot \frac{\sin 2\gamma \cdot \dot{\gamma}}{2 \left(1 - \frac{R_3^2 \cos^2 \gamma}{(R_3 + h_m)^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \sigma_{\Delta R_i}.$$

Пусть в одном сеансе измерений для углов места γ_1 и γ_2 имеются измерения наклонной дальности и радиальной скорости. Найдём ковариационные связи между этими измерениями:

$$\begin{aligned} \text{cov}[\delta r_i(\gamma_1) \delta r_i(\gamma_2)] &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_3^2}{(R_3 + h_m)^2} \cos^2 \gamma_1}} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_3^2}{(R_3 + h_m)^2} \cos^2 \gamma_2}} \sigma_i^2 \\ \text{cov}[\delta \dot{r}_i(\gamma_1) \delta \dot{r}_i(\gamma_2)] &= \frac{R_E^4}{4(R_3 + h_m)^4} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\sin 2\gamma_1 \cdot |\dot{\gamma}_1|}{\left(1 - \frac{R_3^2 \cos^2 \gamma_1}{(R_3 + h_m)^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\sin 2\gamma_2 \cdot |\dot{\gamma}_2|}{\left(1 - \frac{R_3^2 \cos^2 \gamma_2}{(R_3 + h_m)^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \sigma_i^2 \end{aligned}$$

$$\text{cov}[\delta r_i(\gamma_1)\delta \dot{r}_i(\gamma_2)] = \frac{R_E^2}{2(R_E + h_m)^2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{R_3^2 \cos^2 \gamma_1}{(R_3 + h_m)^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sin 2\gamma_2 \cdot |\dot{\gamma}_2|}{\left(1 - \frac{R_3^2 \cos^2 \gamma_2}{(R_3 + h_m)^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \sigma_i^2$$

Значения ошибок, вносимых ионосферой для различных углов места, при интегральной электронной концентрации $3 \cdot 10^{17}$ эл/м² и $h_m = 300$ км показаны в таблицах 1 и 2.

Таблица 1

γ , град.	20	40	60	80
Δr_i , м	1.1	0.7	0.6	0.5

Таблица 2

γ , град.	10	20	40	60	80
Δr_i , мм/с	0.15	0.12	0.05	0.02	0.01

Литература

1. Наземный комплекс управления дальними космическими аппаратами. Перспективы развития. / Под ред. Ю.М. Урличича. М.: Радиотехника. 2012. 216 с.
2. Тучин А.Г., Аким Э.Л., Горохова А.А., Киселева И.П., Степаньянц В.А. Небесно-механическая интерпретация измерений радиосистемы межпланетных космических аппаратов «Квант-Д». // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2002. № 2. 20 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2002-2>
3. Аким Э.Л., Заславский Г.С., Морской И.М., Рузский Е.Г., Степаньянц В.А., Тучин А.Г. Доставка на землю реликтового вещества с Фобоса – проект Фобос-грунт: баллистика, навигация и управление полетом// Астрономический вестник. т. 44, № 1, 2010, С. 29-40.
4. Авдеев В.Ю. и др. Космическая миссия «Радиоастрон». Первые результаты. // Вестник ФГУП НПО им. С.А. Лавочкина. 2012, № 3, С. 4-21.
URL: <http://vestnik.laspace.ru/archives/03-2012/>
5. Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. – М.: Наука, 1972. 382 с.
6. Аким Э.Л., Энеев Т.М. Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений //Космические исследования. т. 1, вып. 1., 1963, С.5-50.

URL: http://www.kiam1.rssi.ru/~den/lib_akim.html

7. Жаров В.Е. Сферическая астрономия. – Фрязино: «Век 2» 2006. 480 с.
8. Moyer T.D. Formulation for Observed and Computed Values of Deep Space Network Data Types for Navigation, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey. 2003.
URL: http://descanso.jpl.nasa.gov/Monograph/series2/Descanso2_all.pdf
9. Чаплинский В.С. Приложение релятивистской теории к задачам траекторных измерений космических аппаратов. // Космические исследования, т. 23, вып. 1, 1985, С. 49–62.
10. Bhaskaran S. The application of noncoherent Doppler data types for deep space navigation. // TDA Progress Report 42-121. JPL, 1995.
11. Thurman S.W. Deep space navigation with differenced data types. Part 1: Differenced range information content // The telecommunications and data acquisition progress report 42-103, JPL, 15, 1990. P. 47-60.
12. Боровин Г.К., Тучин А.Г., Тучин Д.А., Ярошевский В.С. Ионосферная ошибка траекторных измерений дальности космических аппаратов. // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия «Естественные науки». Специальный выпуск. №3. Математическое моделирование. 2012. С. 20-26.
13. Колосов М.А., Арманд Н.А., Яковлев О.И. Распространение радиоволн при космической связи. – М.: Связь, 1969. 155 с.
14. Berman A.L. A New Approach to the Evaluation and Prediction of Wet Tropospheric Zenith Wet Refraction. JPL DEEP SPACE Progress Report 42-25.
15. Berman A.L. The Prediction of Zenith Range Refraction From Surface Measurements of Meteorological Parameters. JPL Technical Report 32-1602, 1976. 40 p.
16. Estefan J.A., Folkner W.M. Sensitivity of Planetary Cruise Navigation to Earth Orientation Calibration Errors. TDA Progress Report 42-123.
17. Opperman B.D.L. Reconstructing ionospheric TEC over South Africa using signals from a Regional GPS network. // A thesis submitted in fulfillment of the requirements for the degree Doctor of philosophy of Rhodes University. 28 Nov. 2007.

Оглавление

1	Введение	3
2	Измерения наклонной дальности	4
3	Доплеровские измерения радиальной скорости КА	7
3.1	Измерения на основе эффекта Доплера	7
3.2	Запросные измерения радиальной скорости	8
3.3	Интерпретация измерения в виде мгновенного значения радиальной скорости	10
3.4	Интерпретация измерения в виде приращения дальности	15
3.5	Компенсация методической ошибки интерпретации запросных доплеровских измерений	16
3.6	Беззапросные измерения радиальной скорости	17
3.7	Расчётный аналог беззапросного измерения радиальной скорости	19
3.8	Измерения по схеме трёхпутевого Доплера	20
3.9	Разностные некогерентные доплеровские измерения	21
4	Учёт ионосферной и тропосферной составляющих ошибок измерений	22
4.1	Тропосферная составляющая ошибки	22
4.2	Ионосферная составляющая ошибки	25
	Литература	28